

西南民族大学

硕士学位论文

题目 广义误差分布下的随机单位根模型

作者 施华 完成日期 2018年1月15日

学科门类 应用经济学

专业 数量经济学

研究方向 金融数学与应用统计

指导教师 毛瑞华

学院 经济学院

授予学位日期         年    月    日

## 原创性声明

本人郑重声明：本学位论文成果是本人在西南民族大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归西南民族大学所有。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得西南民族大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

作者签名：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_年 月 日

## 学位论文版权使用授权书

本人同意学校根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等有关规定保留本人学位论文并向国家有关部门或资料库送交论文纸件或电子版本，允许论文被查阅和借阅；本人同意西南民族大学可以将论文的全部或者部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或者其它复制手段和汇编学位论文，同时授权中国学术期刊电子杂志社等单位将本论文收录到《中国优秀硕士学位论文全文数据库》、《中国博士学位论文全文数据库》等数据库，并通过网络向社会公众提供信息服务。

导师签名：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_年 月 日

作者签名：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_年 月 日

## 摘 要

单位根模型在数理金融中具有广泛应用，许多数理模型都是以单位根过程作为变量数据生成过程的，而随机单位根模型在单位根过程的基础上放松了单位根系数确定性的假设，将新息引入到单位根系数中，使单位根具有了一定的随机性，这样的模型更加具有一般性。由于金融数据一般都具有厚尾的特征，本文选取一个简单的线性随机单位根模型，将正态分布假设推广到了广义误差分布，并且对该模型的平稳条件、极大似然估计以及随机单位根的假设检验进行了相关讨论，最终给出了该模型的严平稳和弱平稳条件，求解极大似然估计量的两种算法(重新参数化和 EM 算法)以及对随机单位根的两假设检验思路(LM 检验和 Wald 检验)。

**关键词：** 随机单位根；广义误差分布；平稳条件；极大似然估计；假设检验

## Abstract

Unit root model has wide application in mathematical finance, many mathematical models view unit root process as the variable data generation process, and stochastic unit root model on the basis of unit root process relax the certainty of coefficient of unit root hypothesis, it will introduce the new information to the model, making unit root has a certain randomness, this model is more general. Due to the financial data generally have the characteristics of the thick tail, this article selects a simple linear stochastic model of unit root, the normal distribution assumption has been generalized to the generalized error distribution, and the model of steady condition, the maximum likelihood estimation and stochastic unit root hypothesis test has carried on the discussion, finally we gives strictly stationary and weakly stationary condition, solving the maximum likelihood estimators of two kinds of algorithm (parametric and EM algorithm) as well as the two random unit root hypothesis test ideas (LM test and Wald test).

**Keywords:** stochastic unit root;generalized error distribution;steady condition;the maximum likelihood estimation;hypothesis test

# 目 录

摘要 .....	I
Abstract .....	II
前 言 .....	1
第一章 随机单位根模型在金融中的应用潜力 .....	3
第二章 广义误差分布 .....	6
2.1 广义误差分布的定义和中心矩 .....	6
2.2 广义误差分布的模拟事实 .....	7
2.3 广义误差分布的尾部特征 .....	8
第三章 随机单位根模型 .....	11
3.1 随机单位根模型的平稳性 .....	11
3.1.1 随机单位根模型的弱平稳性 .....	11
3.1.2 随机单位根模型的严平稳性 .....	12
3.1.3 随机单位根模型弱平稳与严平稳的比较 .....	16
3.2 随机单位根模型参数的极大似然估计 .....	16
3.2.1 随机单位根模型极大似然估计的计算 .....	17
3.2.2 随机单位根模型极大似然估计的一致性和渐近正态性 .....	24
3.3 随机单位根的假设检验 .....	46
3.3.1 随机单位根的 LM 检验 .....	46
3.3.2 随机单位根的 Wald 检验 .....	51
第四章 进一步的研究方向 .....	53
结 论 .....	54
参考文献 .....	55
附录一 .....	60
附录二 .....	61

致 谢 ..... 62

## 前 言

时间序列分析的一个重要研究课题是探索时间序列的动态结构，研究它们的统计性质。我们可以通过理解时间序列数据的数据生成过程的特点和性质，来建立计量模型，用作经济金融预测，检验各种经济金融理论的可靠性和可行性，为经济金融决策提供数量化的建议。

传统的时间序列分析在进行研究时，通常都是假设数据产生的随机过程是稳定的过程，在此基础上对计量模型中的参数做估计和假设检验。由于稳定的时间序列过程有固定的一阶和二阶矩，过程中的未知参数常可用最小二乘法或最大似然估计得到，在一定的条件下这些估计量的极限分布可由中心极限定理得到。

但是，经济和金融中的许多时间序列并不具有稳定过程的特征，传统的数理统计和计量方法显得无能为力，常常需要其他特殊方法来构建相应的计量模型。在众多非平稳过程中，单位根过程是最常见的一种，许多时间序列都是单位根过程，如金融市场中的股票价格。而对单位根过程或时间序列数据的平稳性检验，大多采用经典的检验方法，如 DF 检验、ADF 检验、PP 检验、KPSS 检验等。这些检验都是建立在数据生成过程的误差为正态分布，假设单位根的存在性不是具有随机性的前提条件下。对于单位根的存在性的随机性问题，Granger 和 Swanson(1994)<sup>[1]</sup> 首先系统地讨论了这个问题，他们认为单位根的存在性是随机的，可以在一个时期内是单位根过程，另一个时期内是平稳过程。同样对于随机单位根的检验也是一个重要课题，Leybouere et.al(1996a,1996b)<sup>[2]</sup> 最早提供了随机单位根的一个检验方法。Ling(2004)<sup>[3]</sup> 构造了一个称为双自回归的随机过程，提出了一个针对参数边界值的 LM 检验。这里，随机单位根过程被看作双自回归过程的一个特例。Kluppelberg et.al(2005)<sup>[4]</sup> 沿用 Ling(2004)<sup>[3]</sup> 提出的双自回归过程，提出了一个新的 LR 检验。作为一种较单位根过程更为精准的数据生成过程，随机单位根过程在数理金融中具有很大的应用潜力。金融中大部分单位根

数据生成过程都可用随机单位根来替换，从而获得更精准的金融结果。这其中有一个较为经典的应用是 Lieberman 和 Phillips(2016)<sup>[5]</sup> 将股票数据生成过程设定为一个多元随机单位根过程，并以此推出了一个更精细更一般化的欧式期权定价模型。

上述研究中，模型的误差分布都是正态分布，而金融数据大多具有尖峰厚尾的特性，正态分布在金融应用中会有一些的局限。因为广义误差分布在形状参数大于  $1/2$  时，具有厚尾的特征，所以，我们在广义误差分布的假设下，构建一个简单的随机单位根模型，讨论了模型的平稳性、参数的极大似然估计、随机单位根的检验三个方面的相关问题。

本文内容安排如下：第二章构造了一个简单的随机单位根模型，作为本文讨论的核心模型的一个雏形，并在正态分布假设下，通过模拟事实说明了随机单位根模型可以很好地描述金融时间序列。第三章介绍了广义误差分布及其相关性质，同样用模拟事实说明了广义误差分布的厚尾特性。第四章在广义误差分布的假设下，构建一个简单的随机单位根模型作为本文的核心模型。从三个方面对其进行了讨论。第一，模型的平稳性；第二，模型参数的极大似然估计；第三，随机单位根的假设检验。第五章，针对本文的相关讨论，提出了进一步的研究方向。

另外，需要说明的是，在广义误差分布的模拟中我用了筛选法，这与一般软件包中常用的反函数法是有所不同的，该方法对于复杂形式来说更加精确更加有效。在随机单位根的平稳性讨论中，弱平稳条件和严平稳条件都是在广义误差分布的假设下推出的，这相对于正态分布来说是一个很有潜力的扩展。在随机单位根的极大似然估计中，为了解决广义误差分布中带有绝对值的问题，我除了运用常见的重新参数化处理方法，还初步设计了一种 EM 算法，理论上可以很好地绕过绝对值问题。在随机单位根的假设检验中，我也是推导出了广义误差分布下的一种 LM 检验统计量及其特殊情况下的极限分布，并且也运用 Delta 方法，提出了一种 Wald 联合检验，这个检验可以同时检验单位根及其随机性，同样这两种假设检验的另一个不同是分布假设都为广义误差分布。



## 第一章 随机单位根模型在金融中的应用潜力

波动性是金融中的一个重要因素，因为它影响着人们的决策，人们的决策又直接影响了股票价格。也正因如此，对波动率的建模成为金融计量的一个重要领域。在实际中，股票波动率的一个特殊性是它不能被直接观测，这给金融模型的预测表现带来了困难。

虽然波动率不可直接观测，但它的一些特征在资产收益率序列中能普遍看到。第一，存在着波动率聚集，也就是说，波动率可能是在一些时间上高，而在另一些时间上低。第二，波动率以连续方式随时间变化，即波动率跳跃很少见。第三，波动率不发散到无穷，即波动率在固定的范围内变化。从统计学角度说，这意味着波动率往往是平稳的。第四，波动率对价格大幅上升和价格大幅下降的反应不同，这种现象成为杠杆效应。

波动率研究的基本思想是，序列  $\{y_t\}$  是序列不相关或低阶序列相关的，但它是相依序列。波动率模型就是试图去刻画序列的这种相依性。波动性建模的一个合理框架是，考虑给定  $t-1$  时刻已知信息  $F_{t-1}$  时  $y_t$  的条件均值和条件方差。

$$\mu_t = E(y_t|F_{t-1}), \sigma_t^2 = \text{var}(y_t|F_{t-1}) = E[(y_t - \mu_t)^2|F_{t-1}] \quad (1-1)$$

针对不同特征的数据，可以对均值方程、波动率方程进行相应的设定，从而构造出需要的数据生成过程，接着就可以用该过程来描述对应的金融时间序列。仿造 ARMA 建模方式的相关波动率模型有 ARCH 模型、GARCH 类模型和 CHARMA 模型。上述模型的波动率方程设定方面，都是用确定的函数来刻画条件方差的演变。还有一种设定思路是用随机方程来描述条件方差，比如随机波动率模型是在条件方差方程中引入了一个新息。根据这种思路，我们可以在均值方程中也引入一个新息，比如给均值方程的系数加入随机性，也引入一个新息，这样的模型称为随机系数模型。

利用随机系数模型的思路，我们可以构建如下模型：

$$y_t = (\alpha + \eta_t)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1-2)$$

$\eta_t, \varepsilon_t$  都是服从正态分布的随机变量。

我们发现，当  $\alpha = 1, \text{var}(\eta_t) = 0$  时，公式1-2实际上是一个随机游走过程。

在图1-1中，我们展示了一些样本量为 1000 时的模拟一阶随机系数自回归序列。这些时间序列清楚地说明了 RCA(1) 可以描述不同波动类型的数据，例如， $\alpha = -0.995, \sigma_\eta^2 = 1$  的图像。以上模拟的 R 语言代码可见附录。

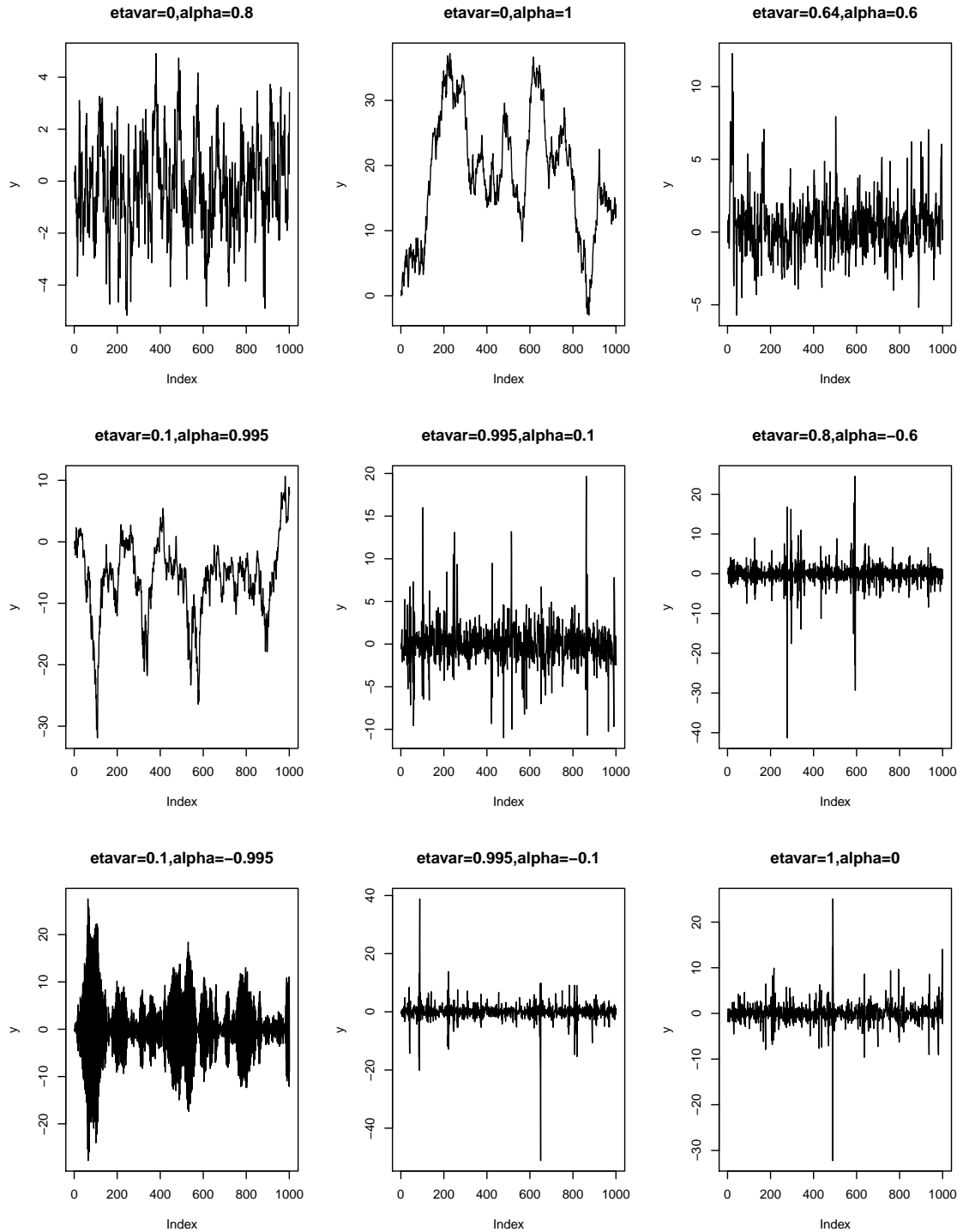


图 1-1 RCA(1) 的模拟

## 第二章 广义误差分布

金融数据往往具有厚尾特性，常用的正态分布尾部并不够厚，这与实际数据有所偏离，为此，我们可以引入其他厚尾分布，如广义误差分布 (Generalized Error Distribution)。下面我们介绍广义误差分布的定义、中心矩性质，并利用模拟事实，说明 GED 分布比正态分布拥有更厚的尾部。最后利用超额峰度推导出形状参数对尾部厚度的影响。

### 第一节 广义误差分布的定义和中心矩

**定义 2.1:** 若随机变量  $X$  服从广义误差分布， $F(X)$  为其分布函数，则

$$dF(x|\mu, \sigma, \kappa) = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\frac{x-\mu}{\sigma}|^{\frac{1}{\kappa}}}}{2^{\kappa+1}\sigma\Gamma(\kappa+1)} \quad (2-1)$$

以上为广义误差分布的密度函数。

由定义2.1我们可以知道，GED 分布是一个单峰对称分布，在  $\kappa = \frac{1}{2}$  时，GED 分布实际上是一个正态分布，即  $G(\mu, \sigma, \frac{1}{2}) = N(\mu, \sigma^2)$ ；在  $\kappa = 1$  时，GED 分布为拉普拉斯分布，即  $G(\mu, \sigma, 1) = L(\mu, 4\sigma^2)$ ；在  $\kappa \rightarrow 0$  时，GED 分布趋近于均匀分布  $U(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ <sup>[6]</sup>。

**定理 2.1:** GED 分布的中心矩为

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(x - \mu)^r \\ &= \frac{1}{2^{\kappa+1}\sigma\Gamma(\kappa+1)} \int_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r e^{-\frac{1}{2}|\frac{x-\mu}{\sigma}|^{\frac{1}{\kappa}}} dx \end{aligned} \quad (2-2)$$

根据定理2.1, 我们知道，当  $r$  为奇数时，由积分性质可知， $\mu^r = 0$ ；当  $r$  为偶数时，令

$$t = \frac{1}{2} \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}}, dt = \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} \frac{1}{\sigma} dx$$

则

$$\mu_r = \frac{2^{r\kappa}\sigma^r}{2^{\kappa+1}\sigma\Gamma(\kappa+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]^{r\kappa} e^{-t} \sigma \cdot 2\kappa \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} dx \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{r\kappa} \sigma^r \sigma \cdot 2\kappa}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} \int_{-\infty}^{\infty} t^{r\kappa} e^{-t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} dx \\
&= \frac{2^{r\kappa} \sigma^r \cdot \sigma \cdot 2\kappa \cdot 2^{\kappa-1}}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} \int_{-\infty}^{\infty} t^{r\kappa} t^{\kappa-1} e^{-t} dt \quad (\Gamma(\kappa+1) = \kappa \Gamma(\kappa)) \\
&= \frac{2^{r\kappa} \sigma^r}{2\Gamma(\kappa)} \int_{-\infty}^{\infty} t^{r\kappa} t^{\kappa-1} e^{-t} dt \quad (\text{偶函数积分性质}) \\
&= \frac{2^{r\kappa} \sigma^r}{\Gamma(\kappa)} \int_0^{\infty} t^{r(\kappa+1)-1} e^{-t} dt \\
&= 2^{r\kappa} \sigma^r \frac{\Gamma[\kappa(r+1)]}{(\Gamma)}
\end{aligned}$$

## 第二节 广义误差分布的模拟事实

为了模拟出服从 GED 分布的随机变量，我们采用筛选法来模拟 GED 随机变量。这里采用筛选法是因为 GED 分布函数的逆函数很难求，也很复杂，常用的逆变换法很不实用。

筛选法最早由著名的数学家 John von Neumann 提出<sup>[13]</sup>，由下面的介绍可以看出在模拟连续型随机变量的情形时其优越性更加明显。假设要模拟一个具有概率函数  $\{p_j, j \geq 0\}$  (或者密度函数  $f(x)$ ) 的随机变量 X，但此概率函数（或密度函数）比较复杂，那么可以通过先模拟一个随机变量 Y 与 X 具有相同的取值，但其概率函数  $\{q_j, j \geq 0\}$  (或者密度函数  $g(x)$ ) 相对简单，然后以与  $\frac{p_j}{q_j}$  (或  $\frac{f(Y)}{g(Y)}$ ) 或比例的概率接受此模拟值，这样就可以模拟出 X 的值。此方法即为筛选法。特别地，令 C 为以常数，使得

$$\frac{p_j}{q_j} \leq C \quad \text{对所有满足 } p_j > 0 \text{ 的 } j$$

或者

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq C \quad \text{对所有的 } y$$

其算法如下<sup>[14]</sup>：

Step1: 模拟一个具有概率函数  $\{p_j, j \geq 0\}$  (或者密度函数  $g(x)$ ) 随机变量 Y 的值。

Step2: 产生一个随机数 U。

Step3: 若  $U < \frac{p_j}{q_j}$  (或者  $\frac{f(Y)}{g(Y)}$ )，则令  $X = Y$  并停止；否则回到 Step1。

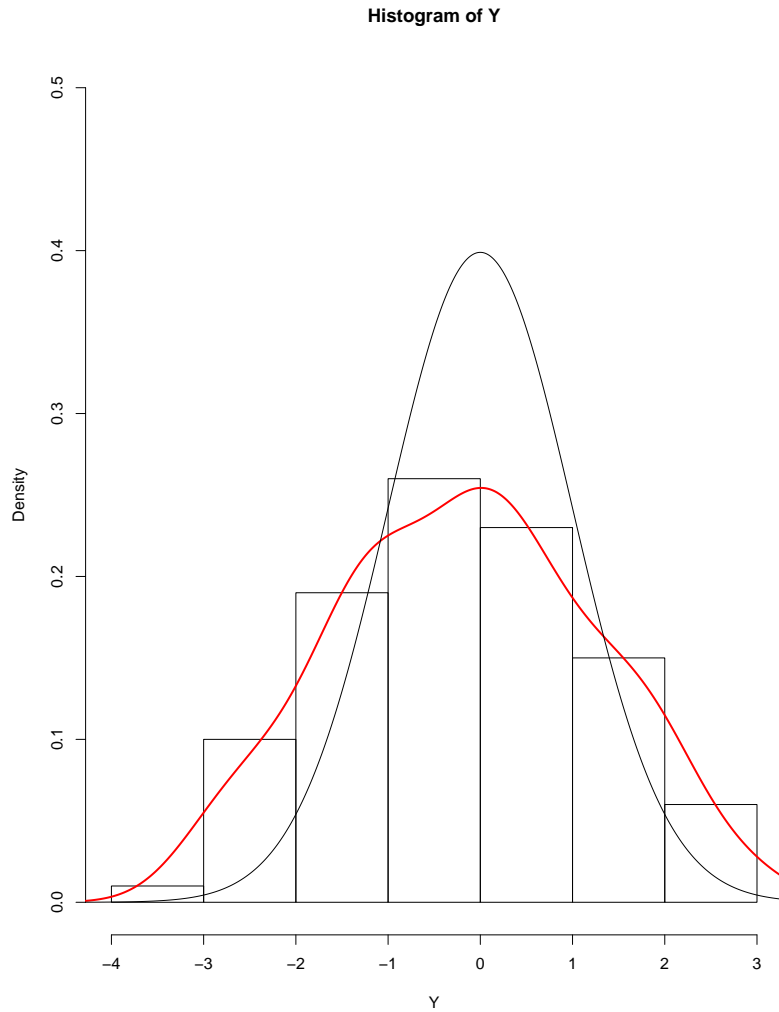


图 2-1 GED 随机变量的模拟

利用上述算法模拟出 GED 随机变量，如图2-1。相关模拟算法 R 语言代码见附录。

从图2-1中可以看出，GED 分布确实比正态分布具有更厚的尾部。

### 第三节 广义误差分布的尾部特征

我们发现 GED 分布实质上是一个一般化的分布，其尾部特性是由形状参数所控制的。为此，我们利用超额峰度来研究形状参数  $\kappa$  对 GED 分布尾部特性的影响。

**定义 2.2:** 峰度定义为:

$$\kappa = \frac{E(x - \mu)^4}{[var(x)]^2} \quad (2-4)$$

利用峰度定义, 我们可以定义超额峰度为:

$$\kappa - 3 = \beta_\kappa \quad (2-5)$$

这里的 3 是因为正态分布的峰度正好为 3, 以此为标准。

超额峰度在数理统计是一个很好的分析尾部特性的工具, 因此, 超额峰度也可以视作对分布尾部厚度的一种量化。

由定义 2.2 和定理 2.1 得到

$$EX = \mu \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= var + (EX)^2 \\ &= 2^{2\kappa} \sigma^2 \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} + \mu^2 \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\mu_3 = 0 \quad (2-8)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{E(x - \mu)^4}{[var(x)]^2} \\ &= \frac{2^4 \kappa \sigma^4 \frac{\Gamma(5\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}{2^{4\kappa} \sigma^4 \frac{\Gamma^2(3\kappa)}{\Gamma^2(\kappa)}} \\ &= \frac{\Gamma(5\kappa) \Gamma^2(\kappa)}{\Gamma^2(3\kappa) \Gamma(\kappa)} \\ &= \frac{\Gamma(5\kappa) \Gamma(\kappa)}{\Gamma^2(3\kappa)} \end{aligned} \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} \beta_\kappa &= \kappa - 3 \\ &= \frac{\Gamma(5\kappa) \Gamma(\kappa)}{\Gamma^2(3\kappa)} - 3 \end{aligned} \quad (2-10)$$

我们发现  $\kappa < \frac{1}{2}$  时, 具有薄尾特征,  $\kappa > \frac{1}{2}$  时, 具有厚尾特征。为了推出超额峰度和形状参数的关系, 我们还需要一个引理。

**引理 2.1** (斯特林近似公式):

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2-11)$$

该公式称为斯特林公式<sup>[17]</sup>。

利用引理2.1可以得到,

$$\begin{aligned}
 \beta_{\kappa} &= \kappa - 3 \\
 &= \frac{\Gamma(5\kappa)\Gamma(\kappa)}{\Gamma^2(3\kappa)} - 3 \\
 &= \frac{(5\kappa - 1)!(\kappa - 1)!}{(3\kappa - 1)^2} - 3 \\
 &= \frac{3}{\sqrt{5}} \left(\frac{3125}{729}\right)^{\kappa} \\
 &\approx 1.3 \times 4.3^{\kappa}
 \end{aligned} \tag{2-12}$$

由公式2-12可以知道, 当  $\kappa \rightarrow 0$  时,  $\beta_{\kappa} \rightarrow -\frac{6}{5}$ ; 当  $\kappa > \frac{1}{2}$ ,  $\beta_{\kappa} \rightarrow \infty$ 。  
对公式2-12作图, 我们在图2-2中也可以发现 GED 分布的厚尾区域。

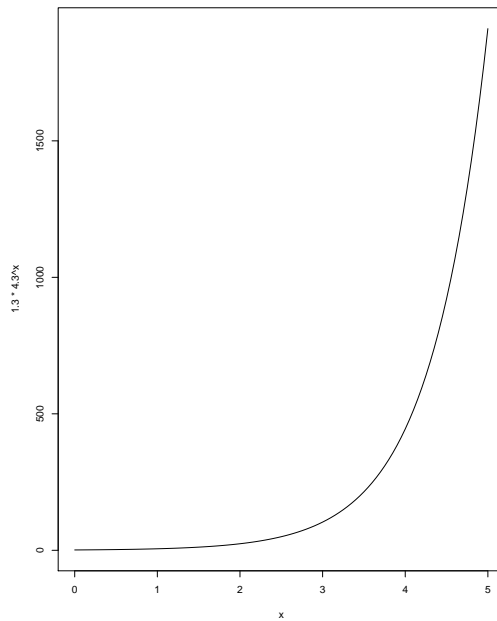


图 2-2  $\kappa$  对超额峰度的影响



## 第三章 随机单位根模型

随机单位根模型的形式有许多种，不同设定下会需要不同的技术来处理。本文我们采用较简单的一种形式，即考虑：

$$y_t = (\alpha + \eta_t)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3-1)$$

$\eta_t, \varepsilon_t$  是服从 GED 分布  $G(0, \sigma_\eta^2, \kappa)$  和  $G(0, \sigma_\varepsilon^2, \kappa)$  的随机变量， $\eta_t$  与  $\varepsilon_t$  相互独立。当  $\alpha = 1$  时，公式3-1就是一个随机单位根模型。下面我们就以公式3-1作为核心模型进行分析。另外，需要说明的是本文中出现的 STUR 字样，就是说的这里的随机单位根模型，只是为了简便用了英文缩写。

### 第一节 随机单位根模型的平稳性

金融数据的平稳性对模型预测分析是很重要的，我们就可以用传统的技术方法来处理，而平稳性在统计意义上，可以分为弱平稳和严平稳，由此，我们就从这两个方面对公式3-1的平稳性进行讨论分析。

#### 3.1.1 随机单位根模型的弱平稳性

**定义 3.1 (弱平稳):** 一随机过程  $X_T$ ，若对  $\forall \tau, t \in T$ ， $D(X(T))$  存在且

$$E[X(T)] = m, COV(X_t, X_{t+\tau}) = R(\tau) \quad (3-2)$$

仅依赖  $\tau$ ，则称  $X_T$  为弱平稳过程，即它的协方差不随时间转移而改变。

接下来，我们可以仿造 Nicholls and Quinn(1982)<sup>[8]</sup> 对于 P 阶随机系数模型弱平稳充要条件的讨论，我们可以得出以下定理。

**定理 3.1 (弱平稳条件):** 将  $F_t$  定义为由  $\{\alpha, \eta_s, \varepsilon_s, s \leq t\}$  生成的  $\sigma$ -域，当且仅当  $\alpha^2 + \sigma_\eta^2 < 1$  时，对于  $y_t = (\alpha + \eta_t)y_{t-1} + \varepsilon_t$ ， $\eta_t$  与  $\varepsilon_t$  相互独立，在  $F_t$  测度下，该模型是弱平稳的。

*证明:* 可见 Nicholls and Quinn(1982) 第二章的相关讨论<sup>[7]</sup>。 □

由图 3.1 可见其弱平稳区域。

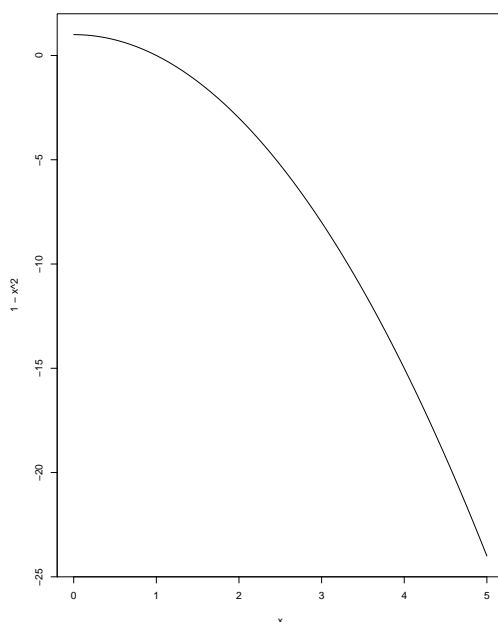


图 3-1 弱平稳区域

### 3.1.2 随机单位根模型的严平稳性

**定义 3.2 (严平稳):** 一随机过程  $X_T$ , 若对  $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ , 及  $h > 0$ ,  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  与  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$  有相同的联合分布, 则称该过程为严平稳过程。严平稳过程的一切有限维分布对时间的推移保持不变。特别地,  $X(t)$  与  $X(s)$  的二维分布只依赖于  $t-s$ 。

**定义 3.3 (遍历性):** 设  $m_X(t) = EX(t)$ ,

$$\bar{X}(t) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (\text{m.s. 意义下}) \quad (3-3)$$

若  $\bar{X}(t) = m_X$  成立, 则称  $X(t)$  具有数学期望的各态历经性, 即遍历性。

**引理 3.1:** 一随机过程  $X(t), Y_t = \Phi(\dots, X_{T-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$ 。当  $X(t)$  是严平稳和遍历的, 且  $X(t)$  独立同分布时,  $Y_t$  也是严平稳和遍历的。

*证明:* 相关细节可见 Billingsley(1995)<sup>[9]</sup> 在其书中定理 36.4 的讨论。 □

下面仿造 Nicholls and Quinn(1982)<sup>[7]</sup> 的相关讨论, 给出以下定理。

**定理 3.2 (严平稳条件):** 已知  $y_t = (\alpha + \eta_t)y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\eta_t$  与  $\varepsilon_t$  相互独立, 则该

过程的严平稳和遍历的充要条件为  $E \ln|\alpha + \eta_t| < 0$ 。

证明: 将模型不断迭代可以得到

$$\prod_{t=1}^n (\alpha + \eta_t) y_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \varepsilon_t \prod_{j=t+1}^n (\alpha + \eta_j) + \varepsilon_n$$

假设  $y_0 = 0, E \ln|\alpha + \eta_t| < 0$ , 由迭代已知, 其第一项和第三项都近似为 0, 只要证第三项收敛即可。令

$$T_t = \varepsilon_t \prod_{j=t+1}^n (\alpha + \eta_j), S_n = \sum_{t=1}^{n-1} T_t$$

则

$$\ln|T_t| = \ln \varepsilon_t + \sum_{j=t+1}^n \ln(\alpha + \eta_j)$$

$$\frac{1}{n-1} \ln|T_t| = \frac{1}{n-1} \ln \varepsilon_t + \frac{1}{n-1} \sum_{j=t+1}^n \ln(\alpha + \eta_j)$$

上式中第一项近似为 0, 第二项可用遍历定理化简, 则上式可化为:

$$\frac{1}{n-1} \ln|T_t| \xrightarrow{a.s.} E \ln(\alpha + \eta_j) < 0$$

令

$$E \ln|\alpha + \eta_j| = -\alpha < 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\ln|T_t|^{\frac{1}{n-1}} = -\alpha < 0$$

$$|T_t|^{\frac{1}{n-1}} = e^{-\alpha} < 1$$

对于任意的使收敛实现的  $T_t^*$ , 给定一个  $\delta > 0$ , 存在  $\rho$  使得  $\delta + a < \rho < 1$ , 由此, 我们可以找到一个区域  $R_\delta$ , 使得  $|T_j^*| < \rho^j$ , 继而  $\sum_{t=1}^n |T_t^*|$  收敛,  $S_n = \sum_{t=1}^n T_t$  也一致收敛, 则

$$\begin{aligned} Y_n^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \varepsilon_t + \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t \prod_{j=t+1}^n (\alpha + \eta_j) \end{aligned}$$

由引理3.1可知, 因为  $\varepsilon_t \prod_{j=t+1}^n (\alpha + \eta_j)$  是严平稳和遍历的, 所以  $Y_n^*$  也是严平稳和遍历的。综上所述, 定理 3.2 得证。□

其实, 若给定  $\eta_t$  的具体分布, 我们可以将定理3.2的充要条件变得更加具体。在此, 我们给出一个引理。

**引理 3.2 (詹森不等式):** 设  $X$  是任意随机变量, 如果  $g(x)$  是凸函数, 则

$$Eg(x) \geq g(Ex) \quad (3-4)$$

上式称为詹森不等式。

*证明:* 详细细节见 Casella 和 Berger(2009)<sup>[10]</sup>。 □

**推论 3.1:** 若模型为公式3-1的设定, 则公式3-1的严平稳和遍历的充要条件为

$$\ln\alpha^2 < -\ln\left[2^{2\kappa} \frac{\sigma_\eta^2 \Gamma(3\kappa)}{\alpha^2 \Gamma(\kappa)}\right]$$

*证明:* 由定理3.2可以知道,

$$\begin{aligned} E\ln|\alpha + \eta_t| &= E\ln\left|\alpha \cdot \left(1 + \frac{\eta_t}{\alpha}\right)\right| \\ &= E\ln|\alpha| \cdot \left|1 + \frac{\eta_t}{\alpha}\right| \\ &= E\left[\ln|\alpha| + \ln\left(1 + \frac{\eta_t}{\alpha}\right)\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\ln\alpha^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\eta_t}{\alpha}\right)^2\right] \\ &= E\left(\frac{1}{2}\ln\alpha^2\right) + \frac{1}{2}E\ln(1 + \eta_t)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln\alpha^2 + \frac{1}{2}E\ln\left(1 + \frac{\eta_t}{\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

又  $\because \eta_t$  服从  $GED(0, \sigma_\eta^2, \kappa)$ ,  $\therefore \frac{\eta_t}{\alpha} \sim GED(0, \frac{\sigma_\eta^2}{\alpha^2}, \kappa)$

令  $x = \frac{\eta_t}{\alpha}$ , 由第二章 GED 分布的相关性质可以知道,

$$EX = 0$$

$$EX^2 = 2^{2\kappa} \frac{\sigma_\eta^2 \Gamma(3\kappa)}{\alpha^2 \Gamma(\kappa)}$$

则上式可以化为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln\alpha^2 + \frac{1}{2}E\ln(1 + x)^2 &\leq \frac{1}{2}\ln\alpha^2 + \frac{1}{2}\ln E(1 + x)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln\alpha^2 + \frac{1}{2}\ln E(1 + 2x + x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \alpha^2 + \frac{1}{2} \ln E(1 + 2x + x^2) &= \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \ln E(2x + x^2) \quad (\text{由詹森不等式得}) \\ &= \frac{1}{2} \ln \alpha^2 + \frac{1}{2} \ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\sigma_\eta^2 \Gamma(3\kappa)}{\alpha^2 \Gamma(\kappa)} \right] \end{aligned}$$

又  $\because E \ln |\alpha + \eta_t| < 0 \therefore \frac{1}{2} \ln \alpha^2 + \frac{1}{2} \ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\sigma_\eta^2 \Gamma(3\kappa)}{\alpha^2 \Gamma(\kappa)} \right] < 0$  即

$$\ln \alpha^2 < -\ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\sigma_\eta^2 \Gamma(3\kappa)}{\alpha^2 \Gamma(\kappa)} \right]$$

□

接下来，我们取  $\kappa = 1$ ，利用推论3.1，给出一个严平稳和遍历区域，如图3-2。

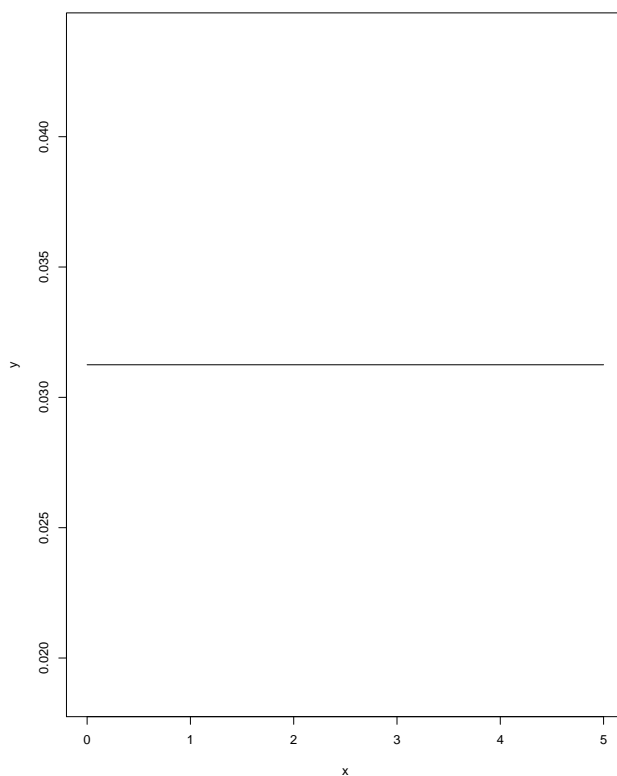


图 3-2 严平稳区域

对推论3.1进一步化简可以得到

$$\sigma_\eta^2 < \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-1} \quad (3-5)$$

所以，形状参数对于严平稳和遍历的区域是又一定影响的，即是说不同的

形状参数会使得图3-2中的直线上下移动。

### 3.1.3 随机单位根模型弱平稳与严平稳的比较

平稳性在统计中具有很重要的意义，一组数据若能证明其是平稳的，那么我们就可以用相对一般的统计方法来分析和预测这组数据。而在实际应用中，我们常常用到的是弱平稳性质，相对于严平稳，弱平稳性质更容易得到满足。这一点在广义误差分布下的随机单位根模型也是满足的。比较图3-1和图3-2, 我们发现，弱平稳区域相较于严平稳区域面积更大，这就验证了随机单位根模型下弱平稳比严平稳更容易满足的特性。

但由于广义误差分布还存在一个形状参数  $\kappa$ ，它可以来控制具体分布形式，当  $\kappa$  变动时，严平稳区域面积可以变化，而弱平稳的区域面积是不受  $\kappa$  的影响的。因此，在  $\kappa$  变动到一定范围时，广义误差分布下的随机单位根模型的弱平稳条件有可能近似于严平稳条件。

如此，以上论述的广义误差分布下的随机单位根模型的这一特征就给了我们一个很有启发性的想法，由于  $\kappa$  的上升会使严平稳与弱平稳间的替代性增强，那么，在金融应用中，由于数据都是厚尾的，我们可以利用广义误差分布在  $\kappa > \frac{1}{2}$  时也为厚尾，在适当范围内提高  $\kappa$ ，以此达到用弱平稳来近似严平稳的目的。又因为弱平稳性质的适用性更加广泛更加容易满足，这就意味着广义误差分布下的随机单位根模型也因此具有更广泛的适用性。进一步地设想，如果数理金融中的单位根过程都用广义误差分布的随机单位根替换的话，不仅模型会变得更加精确更加一般化，而且模型的适用性也会得到一定的提高。

## 第二节 随机单位根模型参数的极大似然估计

由核心模型3-1式可以知道，

$$\begin{aligned} E(y_t|y_{t-1}) &= \alpha y_{t-1} \\ \text{var}(y_t|y_{t-1}) &= (\sigma_\eta^2 y_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2) 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \end{aligned} \quad (3-6)$$

则核心模型的似然函数为

$$\begin{aligned}
 f_n(y_1 \cdots y_t | y_0) &= \prod_{t=1}^n f(y_t | y_{t-1}) \\
 &= \prod_{t=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}\right]}{2^{\kappa+1} \sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}} \Gamma(\kappa + 1)} \\
 &= \prod_{t=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}\right]}{2^{\kappa+1} \sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}} \Gamma(\kappa + 1)} \\
 &= 2^{-(\kappa+1)n} [\Gamma(\kappa + 1)]^{-n} \left[2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}\right]^{-\frac{n}{2}} \\
 &\quad \cdot \prod_{t=1}^n \left\{ (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. \exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}\right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3-7}$$

核心模型的对数似然函数为：

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2) &= -(\kappa + 1)n \ln 2 - n \ln \Gamma(\kappa + 1) \\
 &\quad - \frac{n}{2} \ln \left[2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}\right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3-8}$$

### 3.2.1 随机单位根模型极大似然估计的计算

现在，求解模型参数就演变为对3-8的优化问题，在此我们给出两种算法思路。第一，重新参数化；第二，EM 算法。

我们首先讨论重新参数化方法。

将3-8式乘以  $-\frac{2}{n}$  得，

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{n}L &= 2(\kappa + 1)\ln 2 + 2\ln \Gamma(\kappa + 1) \\
 &\quad + \ln \left[2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}\right] + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

去掉3-9式的常数,

$$\begin{aligned}
 L(\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2, \alpha) &= -\frac{2}{n}L(\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2) - 2(\kappa + 1)\ln 2 \\
 &\quad - 2\ln\Gamma(\kappa + 1) - \ln[2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3-10}$$

接下来, 对上式重新参数化。

这里, 重新参数化是为了对参数降低维度, 从而在优化似然函数时, 对算法起到降低计算量的目的。更为重要的是, 在此处, 可以将绝对值中的多个未知参数转化为一个, 这样在具体识别的时候更加容易处理。

令

$$\tau = \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

则

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln[\sigma_\varepsilon^2 (1 + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2} y_{t-1}^2)] \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2} y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln[\sigma_\varepsilon^2 (1 + \tau y_{t-1}^2)] \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \\
 &\quad \cdot |(\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} [2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}]^{-\frac{1}{2}}|^{\frac{1}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3-11}$$



$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau y_{t-1}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \\
 &\quad \cdot \sigma_\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}} \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} \\
 &= \ln \sigma_\varepsilon^2 + n^{-1} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau y_{t-1}^2) \\
 &\quad + \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} \sigma_\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}} n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

总之，最大化  $L(\alpha, \sigma_\beta^2, \sigma_\eta^2)$  等价于最小化  $L(\alpha, \sigma_\beta^2, \tau)$ ，则

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\sigma_\varepsilon^2, \alpha, \tau)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} + \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} n^{-1} \\
 &\quad \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \left( -\frac{1}{2\kappa} \right) (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2\kappa} - 1}
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

当

$$\frac{\partial L(\sigma_\varepsilon^2, \alpha, \tau)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = 0$$

的时候，

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} &= \frac{\left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}}{2\kappa} \cdot (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2\kappa} - 1} \\
 (\sigma_\varepsilon^2)^{-1 + \frac{1}{2\kappa} + 1} &= \frac{\left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}}{2\kappa} \\
 \sigma_\varepsilon^2 &= \left\{ \frac{\left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(1 + \tau y_{t-1}^2)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}}{2\kappa} \right\}^{2\kappa} \\
 &= \sigma_\varepsilon^2(\tau, \alpha)
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\sigma_\varepsilon^2, \alpha, \tau)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{1}{2\kappa}} \sigma_\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}} n^{-1} \\
 &\quad \left[ \frac{1}{\kappa} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{1 + \tau y_{t-1}^2}} \right|^{\frac{1}{\kappa} - 1} I_{[0, +\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \cdot (-y_{t-1}) \right]
 \end{aligned} \tag{3-15}$$

$$+\frac{1}{\kappa} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{1 + \tau y_{t-1}^2}} \right|^{\frac{1}{\kappa}-1} I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \cdot (y_{t-1})]$$

当

$$\frac{\partial L(\sigma_\varepsilon^2, \alpha, \tau)}{\partial \alpha} = 0$$

的时候,

$$\sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{1 + \tau y_{t-1}^2}} \right|^{\frac{1}{\kappa}-1} I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) = \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{1 + \tau y_{t-1}^2}} \right|^{\frac{1}{\kappa}-1} I_{[0, +\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \quad (3-16)$$

由上式可以确定一个隐函数  $\alpha = \alpha(\tau)$ , 则  $\sigma_\varepsilon^2(\tau, \alpha) = \sigma_\varepsilon^2(\tau, \alpha(\tau)) = \sigma_\varepsilon^2(\tau)$ , 继而  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2, \hat{\alpha}$  都可以由  $\tau$  的函数来表达, 这里的  $\hat{\tau}$  可以由最小化以下函数来获得。

$$g(\tau) = \ln[\sigma_\varepsilon^2(\tau)] + n^{-1} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau y_{t-1}^2) \quad (3-17)$$

这样, 我们就可以把似然函数最大化问题转化为一个最小化  $g(\tau)$  的问题, 并且还是单变量情形, 但由于  $g(\tau)$  显然是一个非线性函数, 我们可以用数值分析的方法来优化  $g(\tau)$ , 找到最优  $\hat{\tau}$ , 再反带回原来的公式, 相继求出极大似然估计值。

从以上讨论, 我们发现, 重新参数化方法其实是多个参数化为对一个参数的求解, 但具体求解过程中, 由于 GED 分布假设的缘故, 存在绝对值形式, 由此不能通过直接的求导的方法来处理, 在实际过程中, 需要对绝对值进行识别后, 再进行处理。从某种程度上来说, 并不能像一般情况下给出一个解析解, 只给出一个相关算法。

针对绝对值问题, 在此我们给出另一种解决方法, 利用 EM 算法来求解极大似然估计。

EM 算法是一种迭代方法, 最初由 Dempster 等提出<sup>[12]</sup>, 主要用来求后验分布的众数 (即极大似然估计), 它的每一次迭代由两步组成: E 步 (求期望) 和 M 步 (极大化)。一般地, 以  $P(\theta|Y)$  表示  $\theta$  基于观测的后验分布密度函数, 称为观测后验分布,  $P(\theta|Y, Z)$  表示添加数据  $Z$  后得到的关于  $\theta$  的后验分布密度函数, 称为添加数据的后验分布,  $P(Z|\theta, Y)$  表示在给定  $\theta$  和观察数据  $Y$  下潜在数据

$Z$  的条件分布密度函数。我们的目的是计算观测后验分布  $P(\theta|Y)$  的众数，EM 算法按下述步骤进行。记  $\theta^{(i)}$  为第  $i+1$  次迭代开始时后验众数的估计值，则第  $i+1$  次迭代的两步为

E 步：将  $P(\theta|Y, Z)$  或  $\log P(\theta|Y, Z)$  关于  $Z$  的条件分布求期望，从而把  $Z$  积掉，即

$$\begin{aligned} Q(\theta|\theta^{(i)}, Y) &\triangleq E_Z[\log P(\theta|Y, Z)|\theta^{(i)}, Y] \\ &= \int \log P(\theta|Y, Z) P(Z|\theta^{(i)}, Y) dZ \end{aligned}$$

M 步：将  $Q(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}, Y)$  极大化，即找一点  $\theta^{(i+1)}$ ，使

$$Q(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}, Y) = \max_{\theta} Q(\theta|\theta^{(i)}, Y)$$

如此形成了一次迭代  $\theta^{(i)} \rightarrow \theta^{(i+1)}$ 。将上述 E 步和 M 步进行迭代直至  $\|\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)}\|$  或  $\|Q(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}, Y) - Q(\theta^{(i)}|\theta^{(i)}, Y)\|$  充分小时停止。

利用 EM 算法还可以处理其他问题，比如做极大似然估计时，由于似然函数较为复杂，求导方法很难实行，这时 EM 算法是一个合适的选择。在此，EM 算法中所说的潜在变量可以解释为数据本身不存在缺失变量，但由于某些原因导致似然函数难以处理。如果添加上额外的变量，问题就变得简单了。假设  $X$  是已知观测数据， $Y$  视为未观测或缺失的数据，这样可以构成  $Z = (X, Y)$  的完全数据。给定数据  $X$ ，我们希望最大化似然函数  $L(\theta|X)$ ，由于一些原因导致似然函数难以处理，而采用  $Z|\theta$  和  $Y|(X, \theta)$  的密度会更容易些。EM 算法正是采用这些容易的密度  $P(\theta|Z)$ ，避开了直接考虑  $P(\theta|X)$ 。

关于核心模型极大似然估计的 EM 算法具体讨论如下。

为了去掉绝对值，我们考虑原模型为两种分布的混合，混合比为  $1-p, p$ ，且  $0 < p < 1$ 。

我们首先给出其混合密度：

$$\begin{aligned} f(y; p, \theta) &= p\phi_1(y) + (1-p)\phi_2(y) \\ \theta &= (\alpha, \sigma_\beta^2, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{3-18}$$

其中,

$$\begin{aligned}\phi_1(y) &= 2^{-(\kappa+1)}\Gamma(\kappa+1)[2^{2\kappa}\frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}]^{-\frac{1}{2}}(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \exp[-\frac{1}{2}(\frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa}\frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}})^{\frac{1}{\kappa}}] \\ \phi_2(y) &= 2^{-(\kappa+1)}\Gamma(\kappa+1)[2^{2\kappa}\frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}]^{-\frac{1}{2}}(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \exp[-\frac{1}{2}(\frac{-y_t + \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa}\frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}})^{\frac{1}{\kappa}}]\end{aligned}$$

给定样本  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_t)$ , 得到其似然函数为

$$f(\theta, p; Y) = \prod_{t=1}^n [p\phi_1 + (1-p)\phi_2] \quad (3-19)$$

对数似然函数为

$$L(\theta, p; Y) = \sum_{t=1}^n \ln[p\phi_1 + (1-p)\phi_2] \quad (3-20)$$

由于

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\theta, p; Y)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L(\theta, p; Y)}{\partial p} = 0 \end{cases} \quad (3-21)$$

很难求解, 所以可以尝试用 EM 算法, 本文只给出初步想法, 对 M 步迭代式的求解还需确定  $\kappa$  值以及其他一些具体的数值优化算法。

引入潜在变量  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_t)$  且  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$  相互独立, 其中

$$Z_t = \begin{cases} 1, & \text{若 } Y_t \text{ 来自 } \phi_1 \\ 0, & \text{若 } Y_t \text{ 来自 } \phi_2 \end{cases} \quad (3-22)$$

以及  $P\{Z_t = 1\} = p, t = 1, 2, \dots, n; Y_t|Z_t = 1$  服从  $\phi_1$  的密度,  $Y_t|Z_t = 0$  服从  $\phi_2$  的密度。

由此,  $(Z_t, Y_t)$  的似然函数为

$$f(\theta, p; Y, Z) = \prod_{t=1}^n p^{Z_t} \phi_1^{Z_t} (1-p)^{1-Z_t} \phi_2^{1-Z_t} \quad (3-23)$$

对上述似然函数取对数后得到

$$\begin{aligned}
 L(\theta, p; Y, Z) &= \sum_{t=1}^n Z_t \ln p + \sum_{t=1}^n Z_t \ln \phi_1 + (n - \sum_{t=1}^n Z_t) \ln(1-p) \\
 &\quad + (n - \sum_{t=1}^n Z_t) \ln \phi_2
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

E 步:

$$\begin{aligned}
 Q(\theta, p | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y) &= E_Z[L(\theta, p; Y, Z) | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y] \\
 &= \sum_{t=1}^n E_Z[Z_t | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y] \ln p \\
 &\quad + \sum_{t=1}^n E_Z[Z_t | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y] \ln \phi_1 \\
 &\quad + \{n - \sum_{t=1}^n E_Z[Z_t | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y]\} \ln(1-p) \\
 &\quad + \{n - \sum_{t=1}^n E_Z[Z_t | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y]\} \ln \phi_2
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

又 ∵

$$E_Z[Z_t | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y] = \frac{p^{(\kappa)} \phi_1}{p^{(\kappa)} \phi_1 + (1 - p^{(\kappa)}) \phi_2} \tag{3-26}$$

∴

$$\begin{aligned}
 Q(\theta, p | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y) &= \sum_{t=1}^n \frac{p^{(\kappa)} \phi_1}{p^{(\kappa)} \phi_1 + (1 - p^{(\kappa)}) \phi_2} \ln p \\
 &\quad + \sum_{t=1}^n \frac{p^{(\kappa)} \phi_1}{p^{(\kappa)} \phi_1 + (1 - p^{(\kappa)}) \phi_2} \ln \phi_1 \\
 &\quad + [n - \sum_{t=1}^n \frac{p^{(\kappa)} \phi_1}{p^{(\kappa)} \phi_1 + (1 - p^{(\kappa)}) \phi_2}] \ln(1-p) \\
 &\quad + [n - \sum_{t=1}^n \frac{p^{(\kappa)} \phi_1}{p^{(\kappa)} \phi_1 + (1 - p^{(\kappa)}) \phi_2}] \ln \phi_2
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

M 步:

我们发现引入潜在变量 Z 后, 通过 E 步解决了原对数似然函数中绝对值对数值优化的影响, 在 M 步中, 我们可以采用其他数值优化方法来对  $Q(\theta, p | \theta^{(\kappa)}, p^{(\kappa)}, Y)$  进行最优化操作。

在此, 我们只是提出 EM 算法的一个初步想法, EM 算法代码还在调试当中。

### 3.2.2 随机单位根模型极大似然估计的一致性和渐近正态性

下面我们讨论 GED 分布下核心模型极大似然估计的一致性和渐近正态性。

首先, 我们讨论 GED 分布下 MLE 的一致性。关于一致性, 我们有以下定理。

**定理 3.3:**

$$MLE \quad \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0, \theta_0 \text{ 为参数真值, } \theta = (\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2).$$

“ $\xrightarrow{P}$ ” 表示依概率收敛。

*证明:* 参考定理 2.5(Newey and McFadden 1994)<sup>[15]</sup>, 若要证明 GED 分布下的 MLE 具有一致性, 只需证明  $\hat{\theta}_{MLE}$  满足下列四个条件即可。

条件一: 如果  $\theta \neq \theta_0$ , 那么  $P\{f(y|\theta) \neq f(y|\theta_0)\} > 0$ , 其中  $\theta = (\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)$ 。

条件二: 参数集  $\theta$  为紧集, 其中  $\theta = (\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)$ 。

条件三: 当  $\theta \in \Theta$  时, 似然函数  $f(y|\theta)$  为连续函数。

条件四:  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\ln f(Y|\theta)|] < \infty, Y = (y_1, y_2, \dots, y_t)$ 。

条件二、三显然成立, 只需证明条件一、四即可。

$$\because L(\cdot) = \ln f(y_1, \dots, y_t|\theta)$$

$$\begin{aligned} &= -(\kappa + 1)\ln 2 \cdot n - n \ln \Gamma(\kappa + 1) - \frac{n}{2} \ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \end{aligned}$$

条件一的证明: 当  $\alpha \neq \alpha_0$  时, 不妨设  $\alpha > \alpha_0$ , 对于  $y_t \in (\alpha_0 y_{t-1}, \alpha y_{t-1})$  时,  $\ln f(y_1, \dots, y_t|\theta)$  为严格的增函数,  $\ln f(y_1, \dots, y_t|\theta_0)$  为严格的减函数, 所以条件一成立。当  $\alpha = \alpha_0$  时,  $\sigma_\varepsilon^2 \neq \sigma_{\varepsilon_0}^2$  时,

$$\begin{aligned} \ln f(y_1, \dots, y_t|\theta) &= -(\kappa + 1)\ln 2 \cdot n - n \ln \Gamma(\kappa + 1) - \frac{n}{2} \ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \end{aligned}$$

由于  $\ln f(y_1, \dots, y_t|\theta)$  与  $\ln f(y_1, \dots, y_t|\theta_0)$  都是指数函数, 不可能有两个以上的交点, 故条件一成立。

同理，当  $\sigma_\eta^2 \neq \sigma_{\eta_0}^2$  时，条件一也成立。

综上所述，条件一成立。

条件四的证明：由三角不等式，有

$$|\ln f(y_1, \dots, y_t | \theta)| \leq \kappa_1 + \kappa_2 \sum_{t=1}^n |y|^{1/\kappa}$$

其中，

$$y = \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|$$

又  $\therefore$  GEF 分布中心矩

$$M_r = 2^{r\kappa} \sigma^r \frac{\Gamma[\kappa(r+1)]}{\Gamma(\kappa)}$$

其中，

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}$$

$$\therefore E(|y|^r) = M_r$$

$$= 2^{r\kappa} \sigma^r \frac{\Gamma[\kappa(r+1)]}{\Gamma(\kappa)}$$

$$E[\sup_{\theta \in \Theta} |\ln f(y_1, \dots, y_t | \theta)|] \leq \kappa_1 + \kappa_2 E\left(\sum_{t=1}^n |y|^{1/\kappa}\right)$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 \sum_{t=1}^n M_r$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 \sum_{t=1}^n 2^{r\kappa} \sigma^r \frac{\Gamma[\kappa(r+1)]}{\Gamma(\kappa)}$$

$$< \infty$$

则条件四成立。

综上所述，GED 分布下，该模型的 MLE 具有一致性。  $\square$

接下来，我们开始讨论 GED 分布假设下核心模型 MLE 的渐近正态性。关于渐近正态性，我们有以下定理。

**定理 3.4:**

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta_0))$$

其中  $I(\theta_0)$  为信息矩阵,

$$I(\theta_0) \equiv E[(\nabla_{\theta} \ln f(Y|\theta_0))(\nabla_{\theta} \ln f(Y|\theta_0))']$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_t)$$

“ $\xrightarrow{d}$ ”表示依分布收敛。

在证明之前,我们需要先求出与似然函数相关的信息矩阵。信息矩阵的表达有许多种,本文采用 BHHH 估计量,其定义如下:

**定义 3.4:**

$$\begin{aligned} I &= E\left[\frac{\partial^2 L(\cdot)}{\partial \theta^2}\right] \\ &= E\left[\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta}\right] \end{aligned} \quad (3-28)$$

此为 BHHH 估计量。

关于 BHHH 估计量的相关讨论细节可见 Green(2004)<sup>[22]</sup>。

已知似然函数

$$\begin{aligned} L(\alpha, \sigma_{\varepsilon}^2, \sigma_{\eta}^2) &= -(\kappa + 1)n \ln 2 - n \ln \Gamma(\kappa + 1) \\ &\quad - \frac{n}{2} \ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\eta}^2 y_{t-1}^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\eta}^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \cdot I_{[0,+\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\eta}^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \cdot I_{[(-\infty,0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \end{aligned} \quad (3-29)$$

令

$$L = \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\eta}^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| \cdot I_{[0,+\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \quad (3-30)$$

$$R = \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\eta}^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| \cdot I_{[(-\infty,0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \quad (3-31)$$

$$A(\kappa) = -(\kappa + 1)n \ln 2 - n \ln \Gamma(\kappa + 1) - \frac{n}{2} \ln \left[ 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right] \quad (3-32)$$

$$L(\alpha, \sigma_{\varepsilon}^2, \sigma_{\eta}^2) = L(\cdot) \quad (3-33)$$



由公式3-30,3-31,3-32,3-33我们可以得到:

$$L(\cdot) = A(\kappa) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}} \quad (3-34)$$

为了用 BHHH 估计量计算信息矩阵, 我们还需要以下引理。

**引理 3.3:**

$$\begin{aligned} & EL^r \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \cdot I_{[0,+\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &= ER^r \left[ \ln\left(\frac{R}{2^\kappa}\right) \right]^m \cdot I_{(-\infty,0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &= B(\kappa, m) \Gamma^{(m)}[\kappa(r+1)] \end{aligned} \quad (3-35)$$

其中,  $B(\kappa, m) = \frac{2^{\kappa m} 2^{[\kappa(+1)-1]}}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}$

证明:

$$\begin{aligned} & EL^r \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \cdot I_{[0,+\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &= \int_0^{+\infty} L^r \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m f(y_t - \alpha y_{t-1}) d(y_t - \alpha y_{t-1}) \quad (\text{令 } \varepsilon_t = y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &= \int_0^{+\infty} L^r \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right|^{\frac{1}{\kappa}}\right]}{2^{\kappa+1} \sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}} \Gamma(\kappa+1)} d\varepsilon_t \\ &= \int_0^{+\infty} L^r \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \frac{e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_t}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}}}}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} d\varepsilon_t \\ & \quad (\text{令 } \sigma^2 = (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} x &= \left[ \left| \frac{\varepsilon}{\sigma} \right| I_{[0,+\infty)}(\varepsilon_t) \right]^{\frac{1}{\kappa}} = L^{\frac{1}{\kappa}} \\ dx &= \frac{1}{\kappa} L^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{1}{\sigma} d\varepsilon_t \\ \text{上式} &= \int_0^{+\infty} L^r \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \frac{e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_t}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}}}}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} d\varepsilon_t \\ &= \int_0^{+\infty} L^{\frac{1}{\kappa} \cdot r \kappa} \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \frac{1}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} e^{-\frac{1}{2} x \left( \frac{1}{\kappa \sigma} L^{\frac{1}{\kappa}-1} \right)^{-1}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{r\kappa} \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \frac{\kappa \sigma}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} e^{-\frac{1}{2} x L^{-\frac{1}{\kappa}(1-\kappa)}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{r\kappa} \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right) \right]^m \frac{1}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa+1)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{1}{2} x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} x^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa} \cdot \kappa} \right]^m \frac{1}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} dx \\
 &= \frac{1}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_0^{+\infty} x^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa} \cdot \kappa} \right]^m dx \\
 &= \frac{1}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_0^{+\infty} x^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \kappa \ln\left(\frac{L}{2^\kappa}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]^m dx \\
 &= \frac{\kappa^m}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_0^{+\infty} x^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \ln\left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]^m dx \\
 &= \frac{2\kappa^m}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_0^{+\infty} x^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]^m d\frac{x}{2} \\
 &= \frac{2\kappa^m}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_0^{+\infty} x^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^{[\kappa(r+1)-1]} \left[ \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]^m d\frac{x}{2} \\
 &= \frac{2\kappa^m 2^{[\kappa(r+1)-1]}}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]^m d\frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{x}{2} \\
 B(\kappa, m) &= \frac{2\kappa^m 2^{[\kappa(r+1)-1]}}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{上式} &= B(\kappa, m) \int_0^{+\infty} t^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-t} (\ln t)^m dt \\
 &= B(\kappa, m) \Gamma^{(m)}[\kappa(r+1)] \quad (\text{Gamma 函数导数性质})
 \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
 ER^r \left[ \ln\left(\frac{R}{2^\kappa}\right) \right]^m \cdot I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\
 = B(\kappa, m) \Gamma^{(m)}[\kappa(r+1)]
 \end{aligned}$$

综上所述, 引理得证。 □

接下来, 我们来求出 BHHH 估计量。已知

$$\begin{aligned}
 L(\cdot) &= A(\kappa) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}} \\
 L &= \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| \cdot I_{[0, +\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\
 R &= \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| \cdot I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1})
 \end{aligned} \tag{3-36}$$

则我们可以求得对应偏导为,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} L^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{\partial L}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} R^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{\partial R}{\partial \alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} L^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{-y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} R^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{-y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\begin{aligned} (\text{令 } \sigma^2 &= (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}) \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \left[ \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} (-y_{t-1}) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} (-y_{t-1}) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} L^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{\partial L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} R^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{\partial R}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \quad (3-38)$$

为了求出

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}$$

还要求出

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \text{ 和 } \frac{\partial R}{\partial \sigma_\varepsilon^2}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= \frac{\partial \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sigma(\sigma_\varepsilon^2)} \right| I_{[0,+\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1})}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \\ &= \frac{\partial \left( \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sigma(\sigma_\varepsilon^2)} \right)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \\ &= (y_t - \alpha y_{t-1}) \left( \frac{1}{2} \right) (\sigma^2)^{\frac{1}{2}-1} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \\ (\text{令 } \sigma^2 &= (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right) (y_t - \alpha y_{t-1}) (\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\ &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} (y_t - \alpha y_{t-1}) \left[ (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3-39)$$

$$\text{上式} = -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| I_{[0,+\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} & \cdot [(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}]^{-1} \\ & \frac{\partial L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} [\sigma^2]^{-1} L \end{aligned} \quad (3-41)$$

另一个

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= \frac{\partial \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sigma(\sigma_\varepsilon^2)} \right| I_{(-\infty,0)}(y_t - \alpha y_{t-1})}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \\ &= \frac{\partial \left( \frac{\alpha y_{t-1} - y_t}{\sigma(\sigma_\varepsilon^2)} \right)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \\ &= (\alpha y_{t-1} - y_t) \left(-\frac{1}{2}\right) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) (\alpha y_{t-1} - y_t) (\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\begin{aligned} &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} (\alpha y_{t-1} - y_t) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (\sigma^2)^{-1} \\ &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| I_{(-\infty,0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ & \cdot [(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}]^{-1} \\ & \frac{\partial R}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} R [\sigma^2]^{-1} \end{aligned} \quad (3-43)$$

根据上面求解出的公式3-41和3-43，我们可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa} \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} \left(-2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} [\sigma^2]^{-1} L\right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa} \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} \left(-2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} [\sigma^2]^{-1} R\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} + \frac{1}{2\kappa} 2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{L^{\frac{1}{\kappa}-1} L}{\sigma^2} + \sum_{t=1}^n \frac{R^{\frac{1}{\kappa}-1} R}{\sigma^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{L^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma^2} + \sum_{t=1}^n \frac{R^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (3-44)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} L^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{\partial L}{\partial \sigma_\eta^2} \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\kappa} R^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{\partial R}{\partial \sigma_\eta^2} \quad (3-45)$$

同样,

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2}$$

也需要

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\eta^2} \text{ 和 } \frac{\partial L}{\partial \sigma_\eta^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \sigma_\eta^2} &= \frac{\partial \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sigma(\sigma_\eta^2)} \right| I_{[0, +\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1})}{\partial \sigma_\eta^2} \\ &\quad \left( \text{令 } \sigma^2 = (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right) \\ \text{又 } \because \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_\eta^2} &= y_{t-1}^2 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\ \therefore \text{上式} &= \frac{\partial \left( \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sigma(\sigma_\eta^2)} \right)}{\partial \sigma_\eta^2} \\ &= (y_t - \alpha y_{t-1}) \left( -\frac{1}{2} \right) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_\eta^2} \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right) (y_t - \alpha y_{t-1}) (\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} y_{t-1}^2 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\ &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} (y_t - \alpha y_{t-1}) \left[ (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-\frac{3}{2}} y_{t-1}^2 \\ &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 (y_t - \alpha y_{t-1}) [\sigma^2]^{-\frac{3}{2}} \\ &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 (y_t - \alpha y_{t-1}) [\sigma^2]^{-\frac{1}{2}} [\sigma^2]^{-1} \\ &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| I_{[0, +\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &\quad \cdot \left[ (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right]^{-1} \end{aligned} \tag{3-46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\eta^2} = -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 [\sigma^2]^{-1} L \tag{3-47}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma_\eta^2} &= \frac{\partial \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sigma(\sigma_\eta^2)} \right| I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1})}{\partial \sigma_\eta^2} \\ &\quad \left( \text{令 } \sigma^2 = (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \right) \end{aligned} \tag{3-48}$$

$$\begin{aligned}
 \text{又} \because \frac{\partial \sigma^2}{\partial \eta^2} &= y_{t-1}^2 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\
 \therefore \text{上式} &= \frac{\partial(\frac{\alpha y_{t-1} - y_t}{\sigma(\sigma_\eta^2)})}{\partial \sigma_\eta^2} \\
 &= (\alpha y_{t-1} - y_t) \left(-\frac{1}{2}\right) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma_\eta^2} \\
 &= (\alpha y_{t-1} - y_t) \left(-\frac{1}{2}\right) (\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} y_{t-1}^2 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\
 &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} (\alpha y_{t-1} - y_t) y_{t-1}^2 (\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} \\
 &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 \left| \frac{y_t - \alpha y_{t-1}}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}}} \right| I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) [\sigma^2]^{-1} \\
 \frac{\partial R}{\partial \sigma_\eta^2} &= -2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 [\sigma^2]^{-1} R \tag{3-49}
 \end{aligned}$$

由公式3-47和3-49，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2} - \frac{1}{2\kappa} \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} [-2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 [\sigma^2]^{-1} L] \\
 &\quad - \frac{1}{2\kappa} \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} [-2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} y_{t-1}^2 [\sigma^2]^{-1} R] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2} + \frac{1}{2\kappa} 2^{2\kappa-1} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n \left(\frac{L^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma^2}\right) y_{t-1}^2 + \sum_{t=1}^n \left(\frac{R^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma^2}\right) y_{t-1}^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} \\
 &\quad \cdot \left[ \sum_{t=1}^n (L^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2) (\sigma^2)^{-1} + \sum_{t=1}^n (R^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2) (\sigma^2)^{-1} \right] \tag{3-50}
 \end{aligned}$$

在此，我们小结一下：

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\kappa} \left[ \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} (-y_{t-1}) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} (-y_{t-1}) (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{3-51}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n \frac{L^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma^2} + \sum_{t=1}^n \frac{R^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma^2} \right] \tag{3-52}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} \tag{3-53}$$

$$\cdot \left[ \sum_{t=1}^n (L^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2) (\sigma^2)^{-1} + \sum_{t=1}^n (R^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2) (\sigma^2)^{-1} \right]$$

当  $t$  之前的信息已知, 则  $y_{t-1}, \sigma^2$  都近似为已知, 可提到求和号之外。

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\kappa} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (y_{t-1}) \left[ -\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} \right] \quad (3-54)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 y_{t-1}^2)^{-1} + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} (\sigma^2)^{-1} \left[ \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}} \right] \quad (3-55)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} = -\frac{1}{2} n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 y_{t-1}^2)^{-1} y_{t-1}^2 + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} (\sigma^2)^{-1} \left[ \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}} \right] \quad (3-56)$$

进一步化简上面三个式子:

令

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2\kappa} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (y_{t-1}) \\ B_1 &= -\frac{1}{2} n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} & B_2 &= -\frac{1}{2} n (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} y_{t-1}^2 \\ C_1 &= 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} (\sigma^2)^{-1} & C_2 &= 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa \Gamma(\kappa)} (\sigma^2)^{-1} (y_{t-1}^2) \end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} = A \left[ -\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} \right] \quad (3-57)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = B_1 + C_1 \left[ \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}} \right] \quad (3-58)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} = B_2 + C_2 \left[ \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}} \right] \quad (3-59)$$

我们定义核心模型的信息矩阵为

$$\alpha \begin{pmatrix} \alpha & \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ D_4 & D_5 & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{pmatrix} \quad (3-60)$$

根据定义3.4, 我们可以知道,

$$\begin{aligned}
 D_j &= E\left[\frac{\partial^2 L(\cdot)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right] \\
 &= E\left[\frac{\partial L(\cdot)}{\partial\theta_i} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial\theta_j}\right]
 \end{aligned} \tag{3-61}$$

进一步, 假设  $\varepsilon_t = y_t - \alpha y_{t-1}$ , 序列不相关, 则

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0 \quad E(LR) = 0 \tag{3-62}$$

$$E(L_t L_{t-j}) = 0 \quad E(R_t R_{t-j}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= E\left(\frac{\partial^2 L(\cdot)}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial\alpha}\right) \\
 &= E\left[A^2\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right] \\
 &= E\left\{A^2\left[\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)^2 + \left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)^2\right]\right\} \\
 &= A^2 E\left[\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)^2 + \left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)^2\right] \\
 &= A^2 E\left[\sum_{t=1}^n R^{\frac{2}{\kappa}-2} + \sum_{t=1}^n L^{\frac{2}{\kappa}-2}\right] \\
 &= A^2 \left(\sum_{t=1}^n ER^{\frac{2}{\kappa}-2} + \sum_{t=1}^n EL^{\frac{2}{\kappa}-2}\right)
 \end{aligned} \tag{3-63}$$

根据引理3.3,

$$r = \frac{2}{\kappa} - 2, m = 0$$

$$\begin{aligned}
 &EL^{\frac{2}{\kappa}-2} \\
 &= ER^{\frac{2}{\kappa}-2} \\
 &= B(\kappa, 0)\Gamma\left[\kappa\left(\frac{2}{\kappa} - 2 + 1\right)\right] \\
 &= B(\kappa, 0)\Gamma(2 - \kappa)
 \end{aligned} \tag{3-64}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore D_1 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial\alpha}\right) \\
 &= A^2 2n B(\kappa, 0)\Gamma(2 - \kappa) \\
 &= 2n A^2 B(\kappa, 0)\Gamma(2 - \kappa)
 \end{aligned} \tag{3-65}$$



$$\begin{aligned}
 D_2 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}\right) \\
 &= E\left\{A\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)[B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\right\}
 \end{aligned} \tag{3-66}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= E\left\{AB_1\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right) + AC_1\left[\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2 - \left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2\right]\right\} \\
 &= AC_1E\left[\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2 - \left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2\right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3-67}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2}\right) \\
 &= E\left\{A\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)[B_2 + C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3-68}$$

$$\begin{aligned}
 D_4 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha}\right) \\
 &= E\left\{[B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]A\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right\} \\
 &= AE\left\{[B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right\} \\
 &= AE\left[B_1\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right] \\
 &\quad + AC_1E\left[\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right] \\
 &= 0 + AC_1E\left[-\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right) + \left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right. \\
 &\quad \left.- \left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right) + \left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3-69}$$

$$\begin{aligned}
 D_5 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}\right) \\
 &= E\left\{[B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)][B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\right\}
 \end{aligned} \tag{3-70}$$

$$D_5 = B_1^2 + 2B_1C_1E\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right) + C_1^2E\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2 \quad (3-71)$$

根据引理3.3,

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\kappa}, m = 0 \\ EL^{\frac{1}{\kappa}} &= ER^{\frac{1}{\kappa}} \\ &= B(\kappa, 0)\Gamma\left[\kappa\left(\frac{1}{\kappa} + 1\right)\right] \\ &= B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) \end{aligned} \quad (3-72)$$

$$\begin{aligned} EL^{\frac{2}{\kappa}} &= ER^{\frac{2}{\kappa}} \\ &= B(\kappa, 0)\Gamma\left[\kappa\left(\frac{2}{\kappa} + 1\right)\right] \\ &= B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_5 &= B_1^2 + 4B_1C_1nB(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + C_1^2E\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2 \\ &= B_1^2 + 4B_1C_1nB(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2C_1^2nB(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa) \end{aligned} \quad (3-73)$$

$$\begin{aligned} D_6 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2}\right) \\ &= E\left\{[B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)][B_2 + C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\right\} \\ &= B_1B_2 + B_1C_2E\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right) + B_2C_1E\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right) \\ &\quad + C_1C_2E\left[\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right] \\ &= B_1B_2 + B_1C_22nEL^{\frac{1}{\kappa}} + B_2C_12nEL^{\frac{1}{\kappa}} + C_1C_2E\left[\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)^2\right] \\ &= B_1B_2 + (B_1C_22n + 2nB_2C_1)B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + C_1C_22nEL^{\frac{2}{\kappa}} \\ &= B_1B_2 + (2nB_1C_2 + 2nB_2C_1)B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2nC_1C_2B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa) \end{aligned} \quad (3-74)$$

$$\begin{aligned}
 D_7 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha}\right) \\
 &= E\left\{[B_2 + C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)][A\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)]\right\} \\
 &= E\left[AB_2\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right) + AB_2\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right. \\
 &\quad \left.+ AC_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right] \quad (3-75) \\
 &= AC_2E\left[\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right) + \left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right. \\
 &\quad \left.+ \left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}}\right) + \left(\sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)\right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_8 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}\right) \\
 &= E\left\{[B_2 + C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)][B_1 + C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\right\} \\
 &= E\left[B_1B_2 + B_2C_1\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right) + B_1C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right. \quad (3-76) \\
 &\quad \left.+ C_1C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right] \\
 &= B_1B_2 + B_2C_12nEL^{\frac{1}{\kappa}} + B_1C_22nEL^{\frac{1}{\kappa}} + C_1C_22nEL^{\frac{2}{\kappa}}
 \end{aligned}$$

$$\text{又} \because EL^{\frac{1}{\kappa}} = B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa)$$

$$EL^{\frac{2}{\kappa}} = B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore D_8 &= B_1B_2 + (2nB_2C_1 + 2nB_1C_2)B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) \quad (3-77) \\
 &\quad + 2C_1C_2nB(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_9 &= E\left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} \cdot \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2}\right) \quad (3-78) \\
 &= E\left\{[B_2 + C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)][B_2 + C_2\left(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}\right)]\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_9 &= E[B_2^2 + 2B_2C_2(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}}) + C_2^2(\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}})^2] \\
 &= B_2^2 + 4nB_2C_2EL^{\frac{1}{\kappa}} + C_2^22nEL^{\frac{2}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3-79}$$

$$\text{又} \because EL^{\frac{1}{\kappa}} = B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa)$$

$$EL^{\frac{2}{\kappa}} = B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)$$

$$\therefore D_9 = B_2^2 + 4nB_2C_2B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2nC_2^2B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa) \tag{3-80}$$

小结一下，信息矩阵为

$$\begin{matrix}
 & \alpha & \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 \\
 \alpha & \left( \begin{matrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ D_4 & D_5 & D_6 \\ D_7 & D_8 & D_9 \end{matrix} \right) \\
 \sigma_\varepsilon^2 & & & \\
 \sigma_\eta^2 & & & 
 \end{matrix} \tag{3-81}$$

其中，

$$D_1 = 2A^2nB(\kappa, 0)\Gamma(2 - \kappa)$$

$$D_2 = 0$$

$$D_3 = 0$$

$$D_4 = 0$$

$$D_5 = B_1^2 + 4B_1C_1nB(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2C_1^2nB(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)$$

$$D_6 = B_1B_2 + (2nB_1C_2 + 2nB_2C_1)B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2nC_1C_2B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)$$

$$D_7 = 0$$

$$D_8 = B_1B_2 + (2nB_2C_1 + 2nB_1C_2)B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2C_1C_2nB(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)$$

$$D_9 = B_2^2 + 4nB_2C_2B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2nC_2^2B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa)$$

(3-82)

$$A = -\frac{1}{2\kappa}(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}(y_{t-1})$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}n(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} \quad B_2 = -\frac{1}{2}n(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} y_{t-1}^2 \tag{3-83}$$

$$C_1 = 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa\Gamma(\kappa)} (\sigma^2)^{-1} \quad C_2 = 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\kappa\Gamma(\kappa)} (\sigma^2)^{-1} (y_{t-1}^2)$$

$$\sigma^2 = (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2) \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \quad (3-84)$$

$$\begin{aligned} B(\kappa, 0) &= \frac{2\kappa^0 2^{[\kappa(r+1)-1]}}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \\ &= \frac{2^{\kappa(r+1)}}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \\ &= \frac{2^{\kappa(r+1)-(\kappa+1)}}{\Gamma(\kappa)} \\ &= \frac{2^{\kappa r-1}}{\Gamma(\kappa)} \end{aligned} \quad (3-85)$$

接下来, 我们给出定理3.4的证明需要的一些引理, 这些引理都来自 Newey and McFadden(1994)<sup>[15]</sup> 对 M 估计量渐近正态性的讨论。

**引理 3.4:** 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $M_0 > 0$ , 使得

$$|\ln x| \leq M_0(1 + x^{-\varepsilon} + x^\varepsilon) \quad (3-86)$$

成立。

**引理 3.5:** 对任意的  $(\mu^*, q^*)$  若有  $|q^* - q| \leq d, |\mu^* - \mu| \leq d$ , 则下列式子成立:

- (一) 当  $y < \mu - d$  时,  $(\mu^* - y)^{q^*} \leq 2 + (\mu + d - y)^{q+d} + (\mu - d - y)^{q-d}$ ;
- (二) 当  $q^* > 0, y < \mu - d$  时,  $(\mu^* - y)^{q^*} \leq 1 + (\mu + d - y)^{q+d}$ ;
- (三) 当  $y > \mu + d$  时,  $(y - \mu^*)^{q^*} \leq 2 + (y - \mu + d)^{q+d} + (y - \mu - d)^{q-d}$ ;
- (四) 当  $q^* > 0, y > \mu + d$  时,  $(y - \mu^*)^{q^*} \leq 1 + (y - \mu + d)^{q+d}$ 。

**引理 3.6:** 若  $X$  为服从  $GED$  分布的随机变量, 那么对于  $\mu \in R, r > -1$  时,

$$E|x - \mu|^r \leq M(\kappa, r, \sigma; \theta_0) \Gamma[\kappa(r + 1)] \quad (3-87)$$

成立。

证明:

$$\begin{aligned} &E|x - \mu|^r \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} |x - \mu|^r \frac{1}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa + 1)} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}}} dx \\ &\quad + \int_{\mu}^{+\infty} |x - \mu|^r \frac{1}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa + 1)} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}}} dx \\ \text{上式第二项} &= \int_{-\infty}^{\mu} \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^r \frac{\sigma^r}{2^{\kappa+1} \sigma \Gamma(\kappa + 1)} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}}} \sigma \kappa t^{\kappa-1} dt \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 t &= \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}} \\
 dt &= \frac{1}{\sigma \kappa} \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa} - 1} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma \kappa} \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|^{\frac{1}{\kappa}(1 - \kappa)} dx \\
 dx &= \sigma \kappa t^{\kappa - 1} dt \\
 \text{上式} &= \int_{-\infty}^{\mu} t^{r\kappa} \frac{\sigma^r}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} e^{-\frac{1}{2} t^{\kappa-1}} dt \\
 &= \frac{2\sigma^r}{2^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \int_{-\infty}^{\mu} t^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2} t^{\kappa-1}} d\frac{t}{2} \\
 &= \frac{\sigma^2 2^{[1-\kappa(r+1)]}}{2^{\kappa} \Gamma(\kappa)} \int_{-\infty}^{\mu} \left(\frac{t}{2}\right)^{[\kappa(r+1)-1]} e^{-\frac{1}{2} t^{\kappa-1}} d\frac{t}{2} \\
 &= \frac{\sigma^2 2^{[1-\kappa(r+1)]}}{2^{\kappa} \Gamma(\kappa)} \Gamma[\kappa(r+1)]
 \end{aligned}$$

由此,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= [M_1(\kappa, r, \sigma; \theta_0) + M_2(\kappa, r, \sigma; \theta_0)] \Gamma[\kappa(r+1)] \\
 &= M_0(\kappa, r, \sigma; \theta_0) \Gamma[\kappa(r+1)] \\
 &\leq M(\kappa, r, \sigma; \theta_0) \Gamma[\kappa(r+1)]
 \end{aligned}$$

故引理 3.6 成立。  $\square$

现在定理 3.4 所需的所有引理都已经讨论, 下面我们给出定理 3.4 的正式证明。

定理 3.4 的证明:

*证明:* 根据 Newey and McFadden 1994 年关于 M 估计量的 MLE 的相关讨论<sup>[15]</sup>, 仿造他们的相关分析方法, 若想证明  $MLE \hat{\theta}$  的渐近正态性, 只需证明

$$\Psi(Y, \theta) = \frac{\partial \ln f(Y|\theta_0)}{\partial \theta}$$

满足下列四个条件即可。

条件一: 对任意给定的  $\theta, \Psi$  可测且可分, 即

$$\lambda(\theta) = E\Psi(Y, \theta)$$

$$U(Y, \theta, d) = \sup_{|r-\theta|<d} |\Psi(Y, \theta) - \Psi(Y, \theta^*)|$$

条件二：存在  $\theta_0 \in \Theta$ ，使得  $\lambda(\theta_0) = 0$ 。

条件三： $E[|\Psi(Y, \theta_0)^2|]$  有限。

条件四：存在  $a, b, c, d_0$ ，使得下面各式成立：

$$\text{当 } |\theta - \theta_0| \leq d_0 \text{ 时, } a|\theta - \theta_0| \leq |\lambda(\theta)| \quad (3-88)$$

$$\text{当 } |\theta - \theta_0| + d \leq d_0, d \geq 0 \text{ 时, } EU(Y, \theta, d) \leq bd \quad (3-89)$$

$$\text{当 } |\theta - \theta_0| + d \leq d_0, d \geq 0 \text{ 时, } E[U(Y, \theta, d)^2] \leq cd^2 \quad (3-90)$$

条件一的证明：

因为

$$\Psi(Y, \theta) = \frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \theta}$$

$$\lambda(\theta) = E\Psi(Y, \theta)$$

$$U(Y, \theta, d) \equiv \sup_{\theta^* \in D^*} |\Psi(Y, \theta^*) - \Psi(Y, \theta)|$$

其中， $D^* \equiv \{\theta^* | |\theta^* - \theta| \leq d\}$ ， $\theta = (\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)$

所以，显然对于任意  $\theta$ ， $\Psi(Y, \theta) = \frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \theta}$  可测量可分离成立，即条件一成立。

条件二证明：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{L(\cdot)}{\partial \alpha} \\ &= A \left[ - \sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1} \right] \end{aligned}$$

由信息矩阵求解中用到的引理3.3，

$$\begin{aligned} & EL^r \left[ \ln \left( \frac{L}{2^\kappa} \right) \right]^m I_{[0, +\infty)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &= ER^r \left[ \ln \left( \frac{L}{2^\kappa} \right) \right]^m I_{(-\infty, 0)}(y_t - \alpha y_{t-1}) \\ &= B(\kappa, m) \Gamma^{(m)}[\kappa(r+1)] \end{aligned}$$

所以，

$$E \left( \frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \alpha} \right) = An [EL^{\frac{1}{\kappa}-1} - ER^{\frac{1}{\kappa}-1}] = 0$$

则条件二成立。

条件三证明：

根据前面分析的信息矩阵

$$\begin{aligned}
 E\left(\left|\frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \alpha}\right|^2\right) &\leq E\left[\left(\frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \alpha}\right)^2\right] \\
 &= D_1 \\
 &= 2A^2 n B(\kappa, 0) \Gamma(2 - \kappa) \\
 E\left(\left|\frac{\partial \ln(Y|\theta)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}\right|^2\right) &\leq E\left[\left(\frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}\right)^2\right] \\
 &= D_5 \\
 &= B_1^2 + 4B_1 C_1 n B(\kappa, 0) \Gamma(1 + \kappa) + 2C_1^2 n B(\kappa, 0) \Gamma(2 + \kappa) \\
 E\left(\left|\frac{\partial \ln(Y|\theta)}{\partial \sigma_\eta^2}\right|^2\right) &\leq E\left[\left(\frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \sigma_\eta^2}\right)^2\right] \\
 &= D_9 \\
 &= B_2^2 + 4n B_2 C_2 B(\kappa, 0) \Gamma(1 + \kappa) + 2n C_2^2 B(\kappa, 0) \Gamma(2 + \kappa)
 \end{aligned}$$

显然， $E[|\Psi(Y, \theta_0)|^2]$  有限成立。

所以条件三成立。

条件四的证明：

公式3-88的证明。

由 Newey and McFadden (1994) 中的分析可以知道公式3-88成立的一个充分条件为  $\lambda(\theta)$  在  $\theta_0$  的领域  $O(\theta_0, d)$  内连续可导<sup>[15]</sup>。

$$\lambda_1(\theta) = E\left[\frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \alpha}\right]$$

则

$$\frac{\partial \lambda_1(\theta)}{\partial \alpha}$$

连续

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\theta) &= E\left[\frac{\partial \ln f(Y|\theta)}{\partial \alpha}\right] \\
 &= AE\left[-\sum_{t=1}^n L^{\frac{1}{\kappa}-1} + \sum_{t=1}^n R^{\frac{1}{\kappa}-1}\right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\theta) &= A \cdot A_1(\tau) E|y_t - \alpha y_{t-1}|^{v-1} I_{(\alpha y_{t-1}, +\infty)}(y_t) \\
 &\quad + A \cdot A_2(\tau) E|y_t - \alpha y_{t-1}|^{v-1} I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t) \\
 &= \int_0^{+\infty} \alpha(Y; \theta) dY
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 a(Y; \theta) &= A_1(\tau) Y^{v-1} f(\alpha y_{t-1} + y_t; \theta_0) \\
 &\quad + A_2(\tau) Y^{v-1} I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})} f(\alpha y_{t-1} - y_t; \theta_0)
 \end{aligned}$$

$A_1, A_2$  为基于  $(\alpha, \sigma_\beta^2, \sigma_\eta^2)$  的连续函数,  $f(Y, \theta_0)$  为 GED 的联合密度函数。

令足够小的  $d_0 > 0, O(\theta_0, d_0) \equiv \{\theta : |\theta - \theta_0| < d_0\} \in \Theta$ 。

显然  $a(Y; \theta)$  在  $O(\theta_0, d_0)$  上连续可导。

$$\sup_{|\theta - \theta_0| < d_0} \left| \frac{\partial a(Y; \theta)}{\partial \alpha} \right| \leq \begin{cases} B_0 Y^{v-1}, & 0 \leq Y \leq 1 \\ B_0 Y^{2(v-1)} e^{-B_1 Y}, & Y > 1 \end{cases}$$

由 Newey and McFadden 1994 年讨论 M 估计量的文章中的定理 3.6 可以知道<sup>[15]</sup>,  $\lambda_1(\theta)$  在  $\theta_0$  的领域  $O(\theta_0, d_0)$  对于  $\alpha y_{t-1}$  连续可导, 则公式 3-88 成立。

公式 3-89 的证明。

令

$$\begin{aligned}
 \tau &= (\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2), \theta = (\tau, \alpha), \theta^* = (\tau^*, \alpha^*); D^* = \{\theta^* \mid |\theta^* - \theta| \leq d\} \\
 \mu(Y, \theta, d) &\equiv \sup_{\theta^* \in D^*} |\Psi(Y, \tau^*, \alpha^*) - \Psi(Y, \tau, \alpha)| \\
 &\leq \sup_{\theta^* \in D^*} |\Psi(Y, \tau^*, \alpha^*) - \Psi(Y, \tau^*, \alpha)| \\
 &\quad + \sup_{|\tau^* - \tau| \leq d} |\Psi(Y, \tau^*, \alpha) - \Psi(Y, \tau, \alpha)|
 \end{aligned}$$

因为  $\alpha$  固定且函数是光滑的, 所以上式第二部分的边界很好证明。而对于第一部分有

$$\begin{aligned}
 \Psi(Y, \tau, \alpha) &= c(\tau) \\
 &\quad + [C_{11}(\tau) |\alpha y_{t-1} - y_t|^v + C_{12}(\tau) |\alpha y_{t-1} - y_t| \ln |\alpha y_{t-1} - y_t|] \\
 &\quad \cdot I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [C_{21}(\tau)|\alpha y_{t-1} - y_t|^v + C_{22}(\tau)|\alpha y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha y_{t-1} - y_t|] \\
 & \cdot I_{[\alpha y_{t-1}, +\infty)}(y_t)
 \end{aligned}$$

$C(\cdot), c_{ij}(\cdot)$  为关于  $\tau = (\sigma_\beta^2, \sigma_\eta^2)$  的连续函数,  $v = \frac{1}{\kappa}$  或  $\frac{1}{\kappa} - 1$ 。

现在, 我们只需证以下四个不等式成立:

$$\begin{aligned}
 & E\left[\sup_{\theta^* \in D^*} \left| |\alpha^* y_{t-1} - y_t|^v I_{(-\infty, \alpha^* y_{t-1})}(y_t) - |\alpha y_{t-1} - y_t|^v I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t) \right|\right] \\
 & \leq bd
 \end{aligned} \tag{3-91}$$

$$\begin{aligned}
 & E\left[\sup_{\theta^* \in D^*} \left| |\alpha^* y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha^* y_{t-1} - y_t| I_{(-\infty, \alpha^* y_{t-1})}(y_t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - |\alpha y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha y_{t-1} - y_t| I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t) \right|\right] \\
 & \leq bd
 \end{aligned} \tag{3-92}$$

$$\begin{aligned}
 & E\left[\sup_{\theta^* \in D^*} \left| |\alpha^* y_{t-1} - y_t|^v I_{[\alpha^* y_{t-1}, +\infty)}(y_t) - |\alpha y_{t-1} - y_t|^v I_{[\alpha y_{t-1}, +\infty)}(y_t) \right|\right] \\
 & \leq bd
 \end{aligned} \tag{3-93}$$

$$\begin{aligned}
 & E\left[\sup_{\theta^* \in D^*} \left| |\alpha^* y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha^* y_{t-1} - y_t| I_{[\alpha^* y_{t-1}, +\infty)}(y_t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - |\alpha y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha y_{t-1} - y_t| I_{[\alpha y_{t-1}, +\infty)}(y_t) \right|\right] \\
 & \leq bd
 \end{aligned} \tag{3-94}$$

现在只给出3-92的相关证明, 公式3-91, 3-95, 3-94类似证明。

接下来, 我们开始对公式3-92的证明, 首先重写3-92式:

$$\begin{aligned}
 & E\left[\sup_{\theta^* \in D^*} \left| |\alpha^* y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha^* y_{t-1} - y_t| I_{(-\infty, \alpha^* y_{t-1})}(y_t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - |\alpha y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha y_{t-1} - y_t| I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t) \right|\right] \\
 & \leq bd
 \end{aligned} \tag{3-95}$$

根据 Taylor 展开定理<sup>[17]</sup> 和引理3.4, 引理3.5, 引理3.6可知, 对任意  $(\alpha y_{t-1}, v), |v^* - v| \leq d, |\alpha^* y_{t-1} - \alpha y_{t-1}| \leq d$  有:

$$\begin{aligned}
 \Delta f(Y, \theta) & = \left| |\alpha^* y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha^* y_{t-1} - y_t| - |\alpha y_{t-1} - y_t|^v \ln|\alpha y_{t-1} - y_t| \right| \\
 f'(Y, \theta) & = v|\hat{\alpha} y_{t-1} - y_t|^{v-1} \ln|\alpha y_{t-1} - y_t| + \frac{|\hat{\alpha} y_{t-1} - y_t|^v}{\hat{\alpha} y_{t-1} - y_t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1} \{v \ln |\alpha y_{t-1} - y_t| + 1\} \quad (\hat{\alpha} \in (\alpha^*, \alpha)) \\
 \Delta f(Y, \theta) &= ||\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1} [v \ln |\alpha y_{t-1} - y_t| + 1]| \alpha^* y_{t-1} - \alpha y_{t-1}| \\
 &\leq d [|\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1} v |\ln |\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|| + |\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1}] \quad (\text{由引理3.4}) \\
 &\leq d M_0(\varepsilon) [v |\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1} + v |\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1-\varepsilon} \\
 &\quad + v |\hat{\alpha}y_{t-1} - y_t|^{v-1+\varepsilon}] \quad (\text{由引理3.5}) \\
 &\leq d \sum_{i=1}^4 M_i(\varepsilon) [2 + (\alpha y_{t-1} + d - y_t)^{v+d-\delta_i} + (\alpha y_{t-1} - d - y_t)^{v-d-\delta_i}] \\
 &= d E |y_t - \alpha y_{t-1}|^{v+d-\delta_i} \quad (\text{由引理3.6})
 \end{aligned}$$

这里  $\delta_1 = \delta_4 = 1, \delta_2 = 1 + \varepsilon, \delta_3 = 1 - \varepsilon, M_1(\varepsilon) = M_2(\varepsilon) = M_3(\varepsilon) = M_0(\varepsilon)v, M_4(\varepsilon) = M_0(\varepsilon)$ 。

假设  $v \pm d - \delta_i > -1, v \pm d - 1 > -1$ , 则由引理3.6可以知道, 3-92式成立, 同理3-91式, 3-95式, 3-94式也成立。由此3-89式成立。

公式3-90的证明。

$$\begin{aligned}
 &E \left[ \sup_{\theta^* \in D^*} ||\alpha^* y_{t-1} - y_t|^{v \ln |\alpha^* y_{t-1} - y_t|} - |\alpha y_{t-1} - y_t|^{v \ln |\alpha y_{t-1} - y_t|} \right. \\
 &\quad \left. \cdot I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t) \right]^2
 \end{aligned}$$

对任意的  $(\alpha y_{t-1}, v), |v^* - v| \leq d, |\alpha^* y_{t-1} - \alpha y_{t-1}| \leq d,$

$$\begin{aligned}
 &E \left[ \sup_{\theta^* \in D^*} ||\alpha^* y_{t-1} - y_t|^{v \ln |\alpha^* y_{t-1} - y_t|} - |\alpha y_{t-1} - y_t|^{v \ln |\alpha y_{t-1} - y_t|} \right. \\
 &\quad \left. \cdot I_{(-\infty, \alpha y_{t-1})}(y_t) \right]^2 \\
 &\leq (d E |y_t - \alpha y_{t-1}|^{v+d-\delta_i})^2 \\
 &= d^2 (E X^2 - \text{var} X)^2 \\
 &= d^2 C
 \end{aligned}$$

所以3-90式成立, 则条件四成立。

综上所述, 四个条件满足, 则 GED 分布下的 MLE 的渐近正态性成立。  $\square$

### 第三节 随机单位根的假设检验

3-1式核心模型只有在  $\alpha = 1, \sigma_\eta^2 = 0$  时，才是单位根模型。因此，我们需要在核心模型下，对单位根进行检验。本文我们给出两种思路的检验。第一种，LM 检验的思路是先对单位根与随机单位根做区分，再用经典单位根检验。第二种，Wald 检验的思路是直接检验是否为随机单位根。此处只给出大致程序，并未作相关模拟研究。

#### 3.3.1 随机单位根的 LM 检验

由于 LM 检验(此文)的思路只是检验单位根的随机性，所以只是检验  $\sigma_\eta^2$  是否为 0， $\alpha = 1$  是已假设定好的。则

$$H_0 : \sigma_\eta^2 = 0 \quad ; \quad H_1 : \sigma_\eta^2 > 0 \quad (3-96)$$

根据 Engle(1984) 关于 LM 的准则的讨论<sup>[18]</sup>，我们可知此处的 LM 统计量为

$$LM = \frac{S^2(\sigma_\eta^2)}{I(\sigma_\eta^2)} \quad (3-97)$$

$S(\sigma_\eta^2)$  为得分函数

$$\begin{aligned} S(\sigma_\eta^2) &= \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \sigma_\eta^2} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 y_{t-1}^2)^{-1} + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\ &\quad \cdot \left[ \sum_{t=1}^n (L^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2) (\sigma^2)^{-1} + \sum_{t=1}^n (R^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2) (\sigma^2)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3-98)$$

(由前面信息矩阵讨论已知)

当  $\alpha = 1$  时，

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(1, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)}{\partial \sigma_\eta^2} \Big|_{\sigma_\eta^2=0} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 (\sigma_\varepsilon^2)^{-1} \\ &\quad + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - y_{t-1}}{\sigma_0} \right|^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2 \right] (\sigma_0^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3-99)$$

又因为

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n} \quad \varepsilon_t = (y_t - y_{t-1})$$

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= \sigma_\varepsilon^2 \cdot 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \cdot Z(\kappa) \\ Z(\kappa) &= 2^{2\kappa} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)}\end{aligned}$$

上式可以化简为

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(1, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)}{\partial \sigma_\eta^2} \Big|_{\sigma_\eta^2=0} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \left( \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n} \right)^{-1} \\ &\quad + \frac{Z(\kappa)}{4} \frac{1}{[\sigma_\varepsilon^2 Z(\kappa)]} \left[ \sum_{t=1}^n \left| \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 Z(\kappa)}} \right|^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2 \right] \\ &= -\frac{n}{2} \sum_{t=1}^n \left( \frac{y_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2} \right) \\ &\quad + \frac{n}{4 \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2} \left\{ \sum_{t=1}^n \left[ \frac{\varepsilon_t}{\left( \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n} Z(\kappa) \right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{2 \cdot \frac{1}{2\kappa}} \right\} \\ &= -\frac{n}{2} \sum_{t=1}^n \left( \frac{y_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \right) \tag{3-100} \\ &\quad + \frac{n}{4 \sum_{t=1}^n e_t^2} \left\{ \sum_{t=1}^n \left[ \left( \frac{e_t}{\left( \sum_{t=1}^n e_t^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{2 \cdot \frac{1}{2\kappa}} y_{t-1}^2 Z(\kappa)^{-\frac{1}{2\kappa}} n^{\frac{1}{2\kappa}} \right] \right\} \\ &= -\frac{n}{2} \sum_{t=1}^n \left( \frac{y_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \right) \\ &\quad + \frac{n^{1+\frac{1}{2\kappa}}}{4 \sum_{t=1}^n e_t^2 [Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}}]} \sum_{t=1}^n \left[ \left( \frac{e_t}{\left( \sum_{t=1}^n e_t^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{2 \cdot \frac{1}{2\kappa}} y_{t-1}^2 \right] \\ &\quad (\hat{\varepsilon}_t = e_t = y_t - y_{t-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(\sigma_\eta^2) &= D_9 \\ &= B_2^2 + 4nB_2C_2B(\kappa, 0)\Gamma(1 + \kappa) + 2nC_2^2B(\kappa, 0)\Gamma(2 + \kappa) \tag{3-101} \\ &= H(\kappa)\end{aligned}$$

则我们可以得到 LM 统计量,

$$LM = \left\{ -\frac{n}{2} \sum_{t=1}^n \left( \frac{y_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \right) + \frac{n^{1+\frac{1}{2\kappa}}}{4Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}} \sum_{t=1}^n e_t^2} \sum_{t=1}^n \left[ \left( \frac{e_t}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \right)^{2 \cdot \frac{1}{2\kappa}} y_{t-1}^2 \right] \right\}^2 / H(\kappa) \quad (3-102)$$

为了研究 LM 统计量的极限分布, 我们还需要泛函中心极限定理、连续映射定理以及由此衍生的一些命题。关于这些的具体讨论可见 Stock(1994) 关于这些的综述性论文<sup>[20]</sup>。下面依此给出这些定理和命题, 不加证明。

**定理 3.5** (泛函中心极限定理): 设  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t, \dots$  为一列独立同分布的随机变量, 对所有的  $t = 1, 2, \dots$  有  $E(\varepsilon_t) = 0, \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2, r$  为闭区间  $[0, 1]$  中的任一正实数。给定样本  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$ , 取前  $[Tr]$  部分样本作统计量:

$$X_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[Tr]} \varepsilon_t \quad (3-103)$$

那么, 当  $T \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} \sqrt{T}X_T(r) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \varepsilon_t \\ &\Rightarrow \sigma W(r) \\ &\equiv B(r) \end{aligned} \quad (3-104)$$

上式中的 “ $\Rightarrow$ ” 表示 “弱收敛于”。

以上的泛函中心极限定理也称为 Donsker 定理, 它在研究诸如  $\{X_T(r)\}$  的随机函数序列的极限分布中有重要作用, 正如中心极限定理在研究随机变量序列的极限分布中的作用一样<sup>[19]</sup>。

**定理 3.6** (连续映射定理): 设  $\{x_t\}, t = 1, 2, \dots$  为随机变量序列, 且以分布收敛于随机变量  $x$ 。若  $g(\cdot)$  为连续函数, 那么随机变量序列  $\{g(x_t), t = 1, 2, \dots\}$  以分布收敛于随机变量  $g(x)$ , 记为:

$$g(x_t) \xrightarrow{d} g(x) \quad (3-105)$$

以上定理称为连续映射定理<sup>[19]</sup>。

利用泛函中心极限定理和连续映射定理, 可以得到以下有用命题, 该命题详细讨论可见 Stock(1994) 在单位根检验中的讨论<sup>[20]</sup>。

**命题 3.1:** 设随机游动过程

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3-106)$$

中,  $\{\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots\}$  为独立同分布,  $E(\varepsilon_t) = 0, \text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ 。若  $y_0 = 0$ , 以下的极限成立:

$$\begin{aligned} (1) & T^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \Rightarrow \sigma W(r); \\ (2) & T^{-1} \sum_{t=1}^T y_{t-1} \varepsilon_t \Rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2 (W^2(1) - 1); \\ (3) & T^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^T t \varepsilon_t \Rightarrow \sigma W(1) - \sigma \int_0^1 W(r) dr; \\ (4) & T^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1} \Rightarrow \sigma \int_0^1 W(r) dr; \\ (5) & T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T t y_{t-1} \Rightarrow \sigma \int_0^1 r W(r) dr; \\ (6) & T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 \Rightarrow \sigma^2 \int_0^1 W^2(r) dr. \end{aligned}$$

还有许多类似弱收敛过程, 在此我们只给出常用的几个。

如上所述,  $\sigma_\varepsilon^2 \neq 1$  时, LM 统计量可以用模拟的方法导出其分布, 但当  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  时, 我们可以利用定理3.5, 定理3.6, 命题3.1得到 LM 统计量的极限分布, 具体推导如下:

$$\begin{aligned} S(\sigma_\eta^2) &= \frac{\partial L(1, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)}{\partial \sigma_\eta^2} \Big|_{\sigma_\eta^2=0} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 (\sigma_\varepsilon^2)^{-1} \\ &\quad + 2^{2\kappa-2} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - y_{t-1}}{\sigma_0} \right|^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2 \right] (\sigma_0^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3-107)$$

当  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  时,

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \sigma_\varepsilon^2 Z(\kappa) \\ &= Z(\kappa) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S(1, 1, 0) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 + \frac{Z(\kappa)}{4} \frac{1}{Z(\kappa)} \left[ \sum_{t=1}^n (\varepsilon_t)^{2 \cdot \frac{1}{2\kappa}} y_{t-1}^2 \right] (\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2\kappa}} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 + \frac{1}{4Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}}} \left[ \sum_{t=1}^n (\varepsilon_t)^{2 \cdot \frac{1}{2\kappa}} y_{t-1}^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 + \frac{1}{4Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}}} \left[ \sum_{t=1}^n |\varepsilon_t|^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3-108}$$

$$\begin{aligned}
 \text{上式第一部分} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \\
 &= -\frac{T^2}{2} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \\
 &= -\frac{T^2}{2} \int_0^1 W^2(r) dr \quad (\text{由命题3.1})
 \end{aligned}$$

$$\text{上式第二部分} = \frac{1}{4Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}}} \left( \sum_{t=1}^n |\varepsilon_t|^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2 \right)$$

令

$$\xi_t = |\varepsilon_t|^{\frac{1}{\kappa}} y_{t-1}^2$$

$$E(\xi_t) = 0$$

$$\text{var}(\xi_t) = y_{t-1}^2 < \infty$$

所以

$$\begin{aligned}
 X_T(r) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[Tr]} \xi_t \\
 \sqrt{T} X_T(r) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \xi_t \\
 &\Rightarrow W(r) \quad (\text{由定理3.5可知})
 \end{aligned}$$

则

$$\text{第二部分} \Rightarrow \frac{T^{\frac{1}{2}}}{4Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}}} W(r)$$

综上所述,

$$LM_{(\sigma_\varepsilon^2=1)} \Rightarrow \left[ -\frac{T^2}{2} \int_0^1 W^2(r) dr + \frac{T^{\frac{1}{2}}}{4Z(\kappa)^{\frac{1}{2\kappa}}} W(r) \right]^2 / H(\kappa) \tag{3-109}$$



### 3.3.2 随机单位根的 Wald 检验

对于3-1式核心模型来说, 当  $\alpha^2 + \sigma_\eta^2 < 1$  时候, 模型是二阶矩平稳的 (或弱平稳); 当  $\alpha^2 + \sigma_\eta^2 = 1$  时, 模型是有一个单位根的。因此, 我们可以利用 Wald 准则来讨论单位根检验问题。

注意, 这里与 LM 检验有一个很大区别, LM 检验是在  $\alpha = 1$  的前提下, 区分随机单位根与单位根模型, 若检测出单位根新息为零, 就可以继续用相关单位根检验来检验是否真的是单位根, 即 LM 检验的实质是检验系数的随机性。而 Wald 检验是同时检测系数的随机性与单位根是否有, 这时一个联合检验。

关于 Wald 准则更多细节可见 Engle(1994) 的讨论<sup>[18]</sup>, 由此可知, 我们还需要参数估计量的极限分布为正态分布。此条件前面已证明。见定理3.4。

接下来, 我们利用 Delta 方法来研究 Wald 统计量, 为此, 我们给出以下引理。

**引理 3.7:** 如果  $f(b)$  为  $b$  的一个连续且连续可微的函数集, 则  $F = \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta'}$ , 并且若  $b$  的渐近分布存在, 那么

$$f(b) \sim N[f(\beta), F\left(\frac{\sigma^2}{n}Q^{-1}\right)F^{-1}] \quad (3-110)$$

实际上, 渐近协方差矩阵的估计量为

$$Est.Asy.Var[f(b)] = C[S^2(X'X)^{-1}]C' \quad (3-111)$$

该引理通常称为 Delta 方法。

这个引理的更多细节可见 Green(2004) 在《计量经济分析》中关于定理 4.6 的相关讨论<sup>[22]</sup>。

由引理3.7,

$$\sqrt{n}[g(\theta_{MLE}) - g(\theta_0)] \rightarrow N[0, \dot{g}(\theta_0)I^{-1}(\theta_0)\dot{g}'(\theta_0)] \quad (3-112)$$

其中,

$$g(\theta) = \alpha^2 \quad \theta = (\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)$$

$$\dot{g}(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta'} = (2\mu_\alpha, 0, 1) = (2\alpha, 0, 1)$$

则

$$\begin{aligned}
 g(\hat{\theta}_{MLE}) &\sim AN[g(\theta_0), \dot{g}(\theta_0)I^{-1}(\theta_0)\dot{g}^T(\theta_0)] \\
 &= AN\left[g(\theta_0), \frac{(2\alpha, 0, 1) \cdot (2\alpha, 0, 1)^T}{I(\theta_0)}\right] \\
 &= AN\left[g(\theta_0), \frac{4\alpha^2 + 1}{I(\theta_0)}\right]
 \end{aligned} \tag{3-113}$$

仿造 T 统计量构造思路,

$$\begin{aligned}
 &T_{Wald} \\
 &= \frac{g(\hat{\theta}_{MLE}) - 1}{\sqrt{(2\alpha^2 + 1)I^{-1}(\theta_0)}} \\
 &\rightarrow Z \sim N(0, 1)
 \end{aligned} \tag{3-114}$$

由此, 我们得到了随机单位根检验的 Wald 检验统计量。

## 第四章 进一步的研究方向

本文将随机单位根模型的分布假设由正态分布扩展到了厚尾分布 (GED 分布)。通过构造一个简单的随机单位根模型, 对 GED 分布下的 MLE 和相关假设检验进行了讨论。

由于 GED 分布的复杂性 (存在绝对值), 使似然函数的优化与以往不同, 本文分别给出了重新参数化和 EM 算法两种解决思路, 但还未给出具体程序代码。对于两种思路的代码实现是下一步的研究目标。而在假设检验方面也只是给出了大致检验思路, 因此, 对假设检验的相关模拟研究是对两种检验程序的有效证明, 这也是我们进一步的研究方向。

## 结 论

本文主要讨论了广义误差分布下随机单位根的相关问题。首先，我们通过模拟研究，说明了随机单位根模型可以很好的模拟金融数据的波动性，即随机单位根模型的潜力。接着，我们也是利用模拟研究说明了广义误差分布比正态分布具有更厚的尾部，这一点很符合金融数据的厚尾特征，也是本文创新的出发点。然后，我们构建一个简单的线性随机单位根模型，开始着重探讨广义误差分布下的相关问题，我们主要从三个方面讨论：第一，平稳性；第二，极大似然估计；第三，随机单位根的假设检验。对于模型平稳性，我们分别给出了弱平稳和严平稳条件；对于极大似然估计，我们给出了极大似然估计量的两种算法：重新参数化和 EM 算法。并且，我们也给出了广义误差分布下极大似然估计的一致性和渐近性的证明。对于随机单位根的假设检验，我们也是分别给出了 LM 检验和 Wald 检验。在 LM 检验中，我们给出的是一种两步检验程序，并推导出了特殊情况下 LM 统计量的极限分布；在 Wald 检验中，我们使用的是一种联合检验程序，这是与 LM 检验的最大区别。

本文的创新在于将随机单位根模型的正态分布假设扩展到了 GED 分布, 更符合金融数据的厚尾特征，并且也尝试给出了一种联合检验思路——Wald 检验，来直接检测单位根及其随机性。而本文的难点是 GED 分布中的绝对值问题，由于绝对值的存在，似然函数的优化变得困难，这也对后面的假设检验的模拟研究造成了一定的困难。因此，对于包含绝对值的似然函数的优化问题自然成为我们下一步的研究方向。

## 参考文献

- [1] Clive WJ Granger and Norman R Swanson. 1997. An introduction to stochastic unit-root processes[J]. *Journal of Econometrics*, 80:35-62.
- [2] Leybourne Stephen, J. Brendan P.M. McCabe and Terence C Mills. 1996. Randomized unit root processes for modelling and forecasting financial time series: Theory and applications[J]. *Journal of Forecasting*, 15:253-270.
- [3] Ling Shiqing. 2004. Estimation and testing stationarity for double-autoregressive models[J]. *JR Statistic*, 66:63-78.
- [4] Klüppelberg Claudia Maller Ross A, van de Vyver Mark Wee Derick. 2005. Testing for reduction to random walk in autoregressive conditional heteroskedasticity models[J]. *Journal of Econometrics*, 5:387-416.
- [5] Offer Lieberman, Peter C.B. Phillips. 2016. A multivariate stochastic unit root model with an application to derivative pricing[J]. *Journal of Econometrics*, 196:1-123.
- [6] Graham Giller. 2005. A Generalized Error Distribution[J]. *Electronic Journal*, 8:1-7.
- [7] Nicholls D.F., Quinn B.G. 1982. Random coefficient autoregressive models: an introduction[M]. New York: wiley.
- [8] Quinn B.G. 1982. A note on the existence of strictly stationary solutions to bilinear equations[J]. *Journal of Time series analysis*, 3:249-252.
- [9] Billingsley P. 1995. Probability and measure[M]. New York: wiley.
- [10] George Casello, Roger L. Berger. 2009. 统计推断 [M]. 北京: 机械工业出版社.

- [11] Richard E.Quandt. 1995.Computational problems and methods[J].annals of Econometrics,12:701-740.
- [12] 张宏东.2014.EM 算法及其应用 [D]. 济南: 山东大学.
- [13] 肖枝洪, 朱强.2010. 统计模拟及其 R 实现 [M]. 武汉: 武汉大学出版社.
- [14] 侯雅文, 王斌会.2015. 统计实验及 R 语言模拟 [M]. 广州: 暨南大学出版社.
- [15] Whitney K.newey and Daniel McFadden. 1995.Large sample estimation and hypothesis testing[J].annals of Econometrics,36:2113-2148.
- [16] James D.Hamilton.2015. 时间序列分析 [M]. 北京: 人民大学出版社.
- [17] 陈纪修, 於崇华, 金路.2004. 数学分析 [M]. 北京: 高等教育出版社.
- [18] Robert F.Engle. 1995.Wald,Likelihood ratio and Lagrange Multiplier tests in econometrics[J].annals of Econometrics,13:776-825.
- [19] 陆懋祖.2015. 高级时间序列经济计量学 [M]. 北京: 北京大学出版社.
- [20] James H.Stock.1995.Unit Roots Structural Breaks and Trends[J].annals of Econometrics,46:2740-2831.
- [21] 毛瑞华.2005. 时间序列建模中的随机单位根检验 [D]. 成都: 四川大学.
- [22] H.Greene W.2011. 计量经济分析 [M]. 北京: 人民大学出版社.
- [23] McCabe L.S.J.P.and Tremayne A.R.1996.Can economic time series be differenced to stationarity?[J].Journal of Business and Economic Statistics,14:435-446.
- [24] Gawon Yoon.2006.A note on some properties of STUR processes[J].Oxford Bulletin of Economics and Statistics,68:253-260.

- [25] Gawon Yoon.2016.Stochastic unit root processes: Maximum likelihood estimation, and new Lagrange multiplier and likelihood ratio tests[J].Economic Modelling,52:725-732.
- [26] Gawon Yoon.2005.Stochastic unit roots in the capital asset pricing model? [J].Bulletin of Economic Research,57:370-389.
- [27] 霍建新.2011. 时间序列的随机系数单位根检验及其应用 [D]. 天津: 天津财经大学.
- [28] 左秀霞.2012. 单位根检验的理论及应用研究 [D]. 武汉: 华中科技大学.
- [29] 茅明超.2016. 含有方差变点的单位根模型研究 [D]. 杭州: 浙江大学.
- [30] Ruey S.Tsay.2012. 金融时间序列分析 [M]. 北京: 人民邮电出版社.
- [31] 潘玉龙.2014. 带偏广义误差分布 (SGED 分布) 及其应用研究 [D]. 上海: 华东理工大学.
- [32] Dazhe Wang.2003.Bayesian and frequentist analysis of random coefficient autoregressive models[D].New York:North Carolina State University.
- [33] 林元烈.2017. 应用随机过程 [M]. 北京: 清华大学出版社.
- [34] 李贤平.2010. 概率论基础 [M]. 上海: 复旦大学出版社.
- [35] 特伦斯.C. 米尔斯.2002. 金融时间序列的经济计量学模型 [M]. 北京: 经济科学出版社.
- [36] Philippe Bougeroland and Nico Picard.1992.Strict stationarity of generalised autoregressive processes[J].the Annas of Probability,20:1714-1730.
- [37] Tong H. 1981.A note on a markov bilinear stochastic process in discrete time[J].Journal of time series analysis,2:279-290.

- [38] Ruey S.Tsay. 1989. Testing and modeling threshold autoregressive processes[J]. Journal of the American Statistical Society, 84:231-240.
- [39] 北京大学数学系前代数小组. 2013. 高等代数 [M]. 北京: 高等教育出版社.
- [40] Panayiotis Theodossiou. 2015. Skewed Generalized Error Distribution of Financial Assets and Option Pricing[J]. Multinational Finance Journal, 4:223-266.
- [41] 史蒂文.E. 施里夫. 2015. 金融随机分析 [M]. 上海: 上海财经大学出版社.
- [42] 陈希孺. 2009. 数理统计学教程 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社.
- [43] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 2006. 高等数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社.
- [44] Francq C. and Zakoian J-M. 2012. Strict stationarity testing and estimation of explosive and stationary generalized autoregressive conditional heteroscedsticity models[J]. econometric society, 80:821-861.
- [45] Sigve Brix Dyrhovden. 2016. Stochastic unit-root processes[D]. Berlin: University of Bergen.
- [46] JohnS White. 1958. The Limiting Distribution of the Serial Correlation Coecient in the Explosive Case[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 4:1188-1197.
- [47] Taylor A.M. Robert and van Dijk. Dick. 2002. Can tests for stochastic unit roots provide useful portmanteau tests for persistence?[J]. Oxford Econometrics Statistic, 64:381-397.
- [48] Chong E.K. 2015. 最优化导论 [M]. 西安: 电子工业出版社.
- [49] Hansen B.E. 1994. Autoregressive conditional density estimation[J]. International Economic Review, 35:705-730.



- [50] Phillips P.C.B. 1987. Time Series Regression with a Unit Root[J]. *Econometrica*, 55:277-302.
- [51] Phillips P.C.B and Magdalinos T. 2007. Limit Theory for Moderate Deviations from a Unit Root[J]. *Journal of Econometrics*, 136:115-130.

## 附录一

攻读硕士学位期间已发表论文:

[1] 施华, 王艳琴.2017. 债转股企业道德风险的演化博弈分析 [J]. 财经界 (学术版),2:104-105.

## 附录二

RCA(1) 模拟的 R 语言代码 (以  $\alpha = 0.8, \sigma_{\eta}^2 = 0$  为例):

```

1 y<-rep(0:n)
2 for (i in 1:1000) {
3   eta<-rnorm(1000,0,1)
4   epsilon<-rnorm(1000,0,1)
5   y[i+1]<-epsilon+(0+eta)*y[i]
6 }
7 plot(y,type="l")
8 title(main="etavar=1,alpha=0")

```

GED 随机变量的模拟的 R 语言代码 (以 GED(0,1,1) 为例):

```

1 m1<-function(x){
2   sqrt(2*pi)/16*exp(0.5*x^2-0.5*abs(x)^0.5)
3 }
4 m10<-optimize(m1,interval = c(0,10),maximum = T)$objective
5
6 #迭代生成GED分布变量序列
7 n=100;t=0;Y=rep(0,n)
8 while (t<n) {
9   U=runif(1)
10  X=rnorm(100,0,1)
11  if(sqrt(2*pi)/16*exp(0.5*X^2-0.5*abs(X)^0.5)>1.67*U){
12    t=t+1
13    Y[t]=X
14  }
15 }
16 hist(Y,prob=T,ylim=c(0,0.5))
17 lines(density(Y),col="red",lwd=2)
18 b=seq(-5,5,0.01)
19 lines(b,dnorm(b))

```

## 致 谢

时光的列车匆匆，别离的笙箫悄悄，忘记了来路何方，去路何往；忘记了是晴着，还是阴着；忘了惊鸿一瞥怎样找到了绿洲；忘记了每一个第一次欣喜的容颜。当周遭恢复了淡淡的宁静，脑中闪过的是曾经一束束平常的目光，一个个跳跃的念头，我们的平凡因此而改变。无意，也有意。

停下的每一次，总有别离的月台和缱绻的情怀；走下的每一人，总有滚落的泪滴和不舍的感谢。谢谢毛瑞华老师，从数学学习到毕业论文，让我知道什么是思考的追索与自由；谢谢父亲母亲的宽容与支持，造就我的无忧与无愁；谢谢女友的理解与等待，也谢谢自己的勇气与坚持。从第一笔抄写数学书的犹疑到如今开始感谢的时刻，而今，却只道：笙箫默默，灯火阑珊何追忆。于无声处，满眼蹉跎泪。又是离歌，一阙长亭暮。各自去。萋萋无数，南北东西路。

最后，我们清楚地知道，这篇论文和这段时光，终将成为我一生中不朽的记忆。送我一湾清水，明亮了我的一生。

施 华

2018年1月15日